2 METODOLOGIA DE INVERSÃO

2.1 PROBLEMA DIRETO

O processo de inversão está intimamente relacionado ao problema direto. É através da solução do problema direto que se obtém as respostas dos campos associados a um dado modelo físico. Essas respostas (dados calculados) serão utilizadas no esquema de inversão ao buscar identificar os parâmetros do modelo que descrevem os dados registrados. Portanto, a formulação do problema direto e o processo de obtenção de suas soluções consistem nas primeiras tarefas a serem realizadas em qualquer abordagem do problema inverso.

Como o presente trabalho trata-se de dados de reflexão sísmica, as observações consistem na assinatura física de um campo de onda refletido numa estrutura em subsuperfície devido à excitação produzida por uma fonte sísmica. A informação registrada equivalente a essa assinatura física consiste de um número de traços, cada um, em posições eqüidistantes em uma determinada direção do espaço, mostrando como as partículas do meio movimentam-se em função do tempo. Esses movimentos são sentidos pelos receptores (geofones) após a perturbação provocada pela fonte de energia ter viajado pela Terra. O conjunto destes traços correspondentes aos diversos geofones utilizados constituirá o sismograma, denominado de multicanal. A chegada das ondas sísmicas produzirá variações sistemáticas de traço a traço (eventos sísmicos). Os tempos de percurso serão caracterizados pelos intervalos entre o instante em que se dá a perturbação no meio e as chegadas da energia sísmica no geofone.

É evidente que a solução do problema direto deverá descrever adequadamente os dados observados, ou seja, no caso do método de reflexão sísmica o problema direto será resolvido através da implementação de um algoritmo de modelagem que produzirá um sismograma sintético. Métodos, tais como, traçado de raios, diferenças finitas, elementos finitos, refletividade, são exemplos de algoritmos de modelagem. Esses algoritmos fazem uso de relações matemáticas formuladas a partir de leis físicas. Portanto, para calcular um sismograma sintético, isto é, a forma da onda registrada, ou ao menos, como teoricamente deveria ser, é necessário deduzir a equação que rege a propagação de ondas sísmicas através da Terra.

Como o problema proposto envolve apenas o cálculo dos coeficientes de reflexão da onda P (R_{PP}), poderia ser utilizado as equações de Zoeppritz para a obtenção de uma expressão analítica para R_{PP}. Contudo, não existe uma expressão analítica que descreva as curvas de tempo de percurso para mais de uma camada, ou seja, uma expressão da forma $t(x)$, onde x é a distância fonte-receptor e t o tempo de chegada da onda em um dado receptor. Na prática, ou se utilizam aproximações analíticas, como a equação da hipérbole (DIX, 1955) válida para afastamentos fonte-receptor curtos (menores que a profundidade do refletor), ou métodos numéricos, como por exemplo, o traçado de raios que se baseia na lei de Snell. Desta forma optou-se por utilizar o método do raio implementado no pacote SEIS88 (ČERVENÝ; PŠENČIK, 1988), para a geração dos sismogramas sintéticos.

Na seqüência deste capítulo são apresentados os conceitos básicos envolvidos na dedução da equação da onda, nos aspectos relacionados à partição da energia na interface e nos princípios do método do raio. Nas fórmulas apresentadas, denotou-se matrizes e vetores em negrito, e escalares, em itálico.

Equação da propagação de ondas sísmicas

O método sísmico baseia-se na propagação de ondas elásticas através da Terra. Como essa propagação depende das propriedades elásticas dos meios, dois conceitos são importantes no contexto da teoria da elasticidade, são eles: esforço e deformação.

Quando existe uma resultante de forças externas atuando sobre um corpo, sua forma e volume tendem a ser alterados. Em oposição a estas forças, forças internas (intra-moleculares) agirão de um modo a resistir a tais mudanças na sua forma estrutural original. Como resultado desta reação, pelo menos para pequenas deformações, o corpo tende a voltar ao seu estado original de equilíbrio assim que se cessa a ação das forças externas.

A razão entre esta força e a área na qual é aplicada, é definida esforço. Qualquer esforço pode ser decomposto em componentes paralelas (esforço cisalhante ou tangencial) e perpendiculares (esforço normal ou pressão) à área em que está sendo aplicada a força. Convencionalmente, os esforços são denotados por σ_{ij} (para *i*, *j* = 1, 2 e 3) onde o índice *i* representa a direção em que a força atua e *j* representa a direção da normal à superfície onde atua o esforço, e ambos, *i* e *j*, correspondem aos subscritos do sistema cartesiano, (x_1, x_2, x_3), adotado como sistema de referência (**x**).

Se um corpo dito elástico está sujeito à esforços, sua forma e volume tendem a sofrer modificações. Tais mudanças são chamadas deformações e podem ser representadas em termos do vetor de deslocamentos **u**, com a expressão a seguir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.1}$$

onde o primeiro índice, *i*, indica a orientação do segmento de linha e o segundo indica a direção da mudança de comprimento.

Aplicando a segunda lei de Newton pode-se equacionar o movimento das partículas provocado por esforços exercidos sobre um corpo. Tal equação relaciona o deslocamento das partículas do meio aos esforços, e é conhecida como equação de movimento

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \tag{2.2}$$

A teoria da elasticidade relaciona as forças aplicadas com as deformações ocorridas. Esse relacionamento, freqüentemente denominado como relação *esforço-deformação*, é fornecido pelas leis constitutivas. Para qualquer material essa relação é bastante complexa, pois, depende de vários parâmetros tais como: pressão, temperatura, taxa de esforço, histórico de deformação e magnitude do esforço. Contudo, para esforços de pequena magnitude e curta duração, quase todos os materiais da Terra exibem um comportamento linear entre esforço e deformação. Então, para pequenos esforços, as deformações geradas são diretamente proporcionais, e ao reduzir tais esforços o corpo tende a restaurar a sua forma inicial, caracterizando assim a sua propriedade elástica.

A forma mais geral de uma lei constitutiva para elasticidade linear é a *lei de Hooke*

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad i, j, k, l = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{2.3}$$

onde σ_{ij} é o tensor esforço, ε_{kl} é a parte simétrica do tensor deformação e C_{ijkl} são as constantes de proporcionalidade conhecidas como módulos elásticos que definem as propriedades materiais do meio.

A lei de Hooke na sua forma generalizada lida com relações complicadas, pois, considera anisotropia das propriedades elásticas, ou seja, a relação esforço-deformação depende da direção. No entanto, quando o meio é isotrópico, ela pode ser expressa numa forma relativamente simples,

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.4}$$

onde $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ e δ_{ij} é a função delta de Kronecker que é definida por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad i \neq j \\ 1 & \text{para} \quad i = j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{2.5}$$

Introduzindo a lei de Hooke na equação de movimento pode-se derivar as equações básicas para os campos de deslocamento, **u**, em função das deformações. Combinando esta equação com as relações entre deformação e deslocamento dadas por (2.1), obtém-se a equação vetorial homogênea tridimensional do movimento para um meio elástico, isotrópico e uniforme, também conhecida como equação de movimento elastodinâmico,

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}). \tag{2.6}$$

A Equação (2.6) representa um conjunto de equações diferenciais parciais para os deslocamentos em meios homogêneos, e podem ser resolvidas através do *teorema de Helmholtz* que estabelece que qualquer campo vetorial **u** pode ser representado em termos de um potencial vetorial Ψ e um potencial escalar ϕ, por

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}, \quad \text{se} \quad \nabla \times \phi = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) em (2.6) e usando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Psi} = -\nabla^2\boldsymbol{\Psi}$, visto que $\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$, encontra-se,

$$\nabla\left(\lambda\nabla^2\phi + 2\mu\nabla^2\phi - \rho\ddot{\phi}\right) + \nabla \times \left(\mu\nabla^2\boldsymbol{\Psi} - \rho\ddot{\boldsymbol{\Psi}}\right) = 0 \tag{2.8}$$

A solução desta equação é obtida se os termos entre parêntesis compõem um sistema de equações diferenciais independentes, ou seja, se

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\ddot{\phi} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2\boldsymbol{\Psi} - \frac{1}{\beta^2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}} = 0 \tag{2.9}$$

onde

$$\alpha = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \beta = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

As Equações (2.9) representam as equações de onda para o potencial escalar ϕ e vetorial $\boldsymbol{\Psi}$. Através das referidas equações pode-se identificar que: ϕ é um potencial que corresponde à solução da equação da onda P ($\nabla \times \phi = 0$ implica que não ocorrem rotações das partículas, ou seja, não ocorre cisalhamento) e que $\boldsymbol{\Psi}$ é um potencial que corresponde à onda S ($\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$ implica que não ocorrem mudanças no volume das partículas), e, por fim, os termos α e β caracterizam as velocidades de propagação, respectivamente, da onda P e da onda S em meios elásticos, homogêneos e isotrópicos.

A solução da equação para ambos os tipos de onda, P e S, é uma função do espaço e do tempo e pode ser escolhida de forma conveniente para descrever o campo de onda do problema considerado, ou seja, a solução tanto para ϕ quanto para Ψ pode ser expressa como uma função que assume a seguinte forma geral, $f(\mathbf{x}-ct)$, baseada num conceito de onda progressiva (solução de D'Alembert), assumindo que $f(\mathbf{x},t)$ é igual a $f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, t+\Delta t)$. Seja c a velocidade de propagação da onda, e $\Delta\mathbf{x}$, o espaço percorrido após um intervalo de tempo Δt, prova-se a igualdade mencionada acima, pois, $f(\mathbf{x}-ct_0) = f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}-c(t_0+\Delta t)) =$
$= f(\mathbf{x}+c\Delta t - ct_0 - c\Delta t) = f(\mathbf{x}-ct_0)$.

As ondas sísmicas podem ser consideradas como sendo ondas harmônicas, e, portanto, podem ser representadas pela exponencial com argumento complexo. O argumento dessa função deve expressar as características de periodicidade da onda, assumindo a seguinte forma:

$$\phi(\mathbf{x},t) = A\exp\{-i\mathbf{k}_\alpha(\mathbf{x}-\alpha t)\} \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x},t) = A\exp\{i(\omega t - \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{x})\} \tag{2.11}$$

$$\Psi(\mathbf{x},t) = B\exp\{-i\mathbf{k}_\beta(\mathbf{x}-\beta t)\} \quad \Rightarrow \quad \Psi(\mathbf{x},t) = B\exp\{i(\omega t - \mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{x})\} \tag{2.12}$$

onde: $\mathbf{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda e λ o comprimento de onda; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ é a freqüência angular e T o período; e c é a velocidade da onda, α ou β, que se relaciona aos parâmetros anteriores pela expressão $c = \lambda \cdot f = \dfrac{2\pi}{\mathbf{k}} \cdot \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\omega}{\mathbf{k}}$.

As equações (2.11) e (2.12) descrevem a propagação de uma onda plana em termos dos potenciais, onde $\mathbf{k}_\alpha$ e $\mathbf{k}_\beta$ definem os vetores do número de onda associados com as ondas P e S, respectivamente. Então, para obter a solução da equação de movimento para os deslocamentos, isto é, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, basta derivar os potenciais (2.11 e 2.12) conforme apresentado na expressão (2.7).

Partição de energia na interface

Quando uma onda P encontra uma mudança abrupta nas propriedades elásticas, como quando atinge uma interface separando dois meios diferentes, a energia é particionada, resultando em quatro ondas: ondas P e S refletidas, e P e S refratadas, cujas direções de propagação são dadas pela Lei de Snell,

$$p = \frac{\operatorname{sen} i_1}{\alpha_1} = \frac{\operatorname{sen} i_2}{\alpha_2} = \frac{\operatorname{sen} j_1}{\beta_1} = \frac{\operatorname{sen} j_2}{\beta_2} \tag{2.13}$$

onde: p é o parâmetro do raio; e i_1, i_2, j_1 e j_2 são, respectivamente, os ângulos de incidência (e de reflexão da onda P), refração da onda P, reflexão da onda S e refração da onda S.

A Lei de Snell é muito útil na determinação das trajetórias dos raios e tempos de percurso, porém, não fornece informação sobre as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas. Nesse contexto, a partição de energia na interface entre as ondas refletidas e refratadas é quantificada pelos coeficientes de reflexão e transmissão. Equações correspondentes a tais coeficientes foram dadas por Zoeppritz em 1919. Para deduzir as equações de Zoeppritz para meios elásticos, deve-se aplicar as seguintes condições de contorno à solução da equação da onda obtida anteriormente: na interface, o movimento da onda deve obedecer à continuidade dos esforços e deslocamentos (normais e tangenciais). Considerando que os deslocamentos da onda P estão no plano x_1x_3, essas condições são dadas por:

$$u_1^{meio\,1} = u_1^{meio\,2}, \quad u_3^{meio\,1} = u_3^{meio\,2}, \quad \sigma_{13}^{meio1} = \sigma_{13}^{meio2} \quad \text{e} \quad \sigma_{33}^{meio1} = \sigma_{33}^{meio2} \tag{2.14}$$

Trabalhando-se com as equações (2.4), (2.7), (2.11) e (2.12) em (2.14), chega-se a quatro equações a partir das quais determinam-se quatro coeficientes: R_{PP}, R_{PS}, T_{PP} e T_{PS}, reflexão da onda P, reflexão da onda P convertida em S, transmissão da onda P e transmissão da onda P convertida em S, respectivamente.

O coeficiente de reflexão da onda P refletida a partir de uma onda P incidente, R_{PP}, depende do ângulo de incidência, i_1, das velocidades da onda P, α_1 e α_2, das velocidades da onda S, β_1 e β_2, e das densidades, ρ_1 e ρ_2, dos meios acima (subscrito 1) e abaixo do refletor (subscrito 2), e é dado pela seguinte expressão:

$$R_{PP} = \left\{ \left(b\eta_{\alpha_1} - c\eta_{\alpha_2} \right) F - \left(a + d\eta_{\alpha_1}\eta_{\beta_2} \right) Hp^2 \right\} \big/ D$$

$$a = \rho_2\left(1 - 2\beta_2^2 p^2\right) - \rho_1\left(1 - 2\beta_1^2 p^2\right) \qquad E = b\eta_{\alpha_1} + c\eta_{\alpha_2}$$

$$b = \rho_2\left(1 - 2\beta_2^2 p^2\right) - 2\rho_1\beta_1^2 p^2 \qquad F = b\eta_{\beta_1} + c\eta_{\beta_2}$$

$$c = \rho_1\left(1 - 2\beta_1^2 p^2\right) - 2\rho_2\beta_2^2 p^2 \qquad G = a - d\eta_{\alpha_1}\eta_{\beta_2}$$

$$d = 2\left(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2\right) \qquad H = a - d\eta_{\alpha_2}\eta_{\beta_1}$$

$$D = EF + GHp^2 \tag{2.15}$$

onde:

$$p = \frac{\operatorname{sen} i_1}{\alpha_1}, \qquad \eta_{\alpha_i} = \left[\left(1/\alpha_i^2\right) - p^2\right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \eta_{\beta_i} = \left[\left(1/\beta_i^2\right) - p^2\right]^{1/2} \tag{2.16}$$

Para i_1 acima dos ângulos críticos $i_{c_1} = \operatorname{arcsen}\left(\alpha_1/\alpha_2\right)$ e $i_{c2} = \operatorname{arcsen}\left(\alpha_1/\beta_2\right)$, os valores de η_{α_2} e η_{β_2} tornam-se imaginários, $\eta_{\alpha_2} = i\hat{\eta}_{\alpha_2} = \pm i\left[p^2 - \left(1/\alpha_2^2\right)\right]^{1/2}$ e $\eta_{\beta_2} = i\hat{\eta}_{\beta_2} = \pm i\left[p^2 - \left(1/\beta_2^2\right)\right]^{1/2}$, de forma que R_{PP} torna-se complexo e passa a introduzir um deslocamento de fase nos valores das amplitude refletidas.

Método do raio

O método do raio corresponde a uma solução aproximada da equação da onda, conhecida como solução assintótica válida para altas frequências. Fornece tanto os tempos de percurso das ondas refletidas, como os coeficientes de reflexão e se desejado, permite incorporar o efeito de espalhamento geométrico no cálculo das amplitudes.

Esse método tem sido amplamente empregado para a modelagem das ondas sísmicas em diversas aplicações, entretanto possui uma limitação significativa para meios não homogêneos. Sua aplicação só e válida se as variações espaciais forem suaves, o que significa que qualquer variação espacial das propriedades do meio devem ser maiores do que comprimento de onda dominante das ondas sísmicas (PŠENČIK, 1996; POPOV, 2002).