

Universidade de São Paulo  
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
Departamento de Astronomia

Raphael Alves Silva

# **Difusão caótica e instabilidades em sistemas planetários**

Aplicação da entropia Shannon ao estudo da estabilidade dos sistemas HD  
20003, HD 181433 e Gliese 876

21 de dezembro de 2022



Raphael Alves Silva

# Difusão caótica e instabilidades em sistemas planetários

Aplicação da entropia Shannon ao estudo da estabilidade dos sistemas HD 20003, HD 181433 e Gliese 876

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências. Versão corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Ferraz-Mello.

21 de dezembro de 2022



*Para as mulheres mais importantes de minha vida:*

*minha filhinha, Leona;*

*sua mãe, Alda Mara;*

*e minha mãe, Maria de Lourdes.*



# Agradecimentos

A Deus, em quem eu creio e confio, independentemente de conhecimento, condição ou razão.

Ao professor Sylvio Ferraz-Mello, meu orientador, por quem nutro grande admiração e profundo respeito, e que me inspira a buscar sempre a excelência, enquanto pesquisador, cientista e ser humano.

Ao professor Cristián Beaugé, meu co-orientador e amigo, que me recebeu com grande hospitalidade em Córdoba, Argentina. Me acolheu em terras estrangeiras, me impulsionou a desenvolver uma pesquisa com significado, e me ajudou a enxergar as diferentes perspectivas que devem ser analisadas dentro de um trabalho científico.

Aos professores Pablo Cincotta e Claudia Giordano, da Universidade de La Plata, na Argentina, meus primeiros colaboradores.

Ao IAG e seus funcionários, por contribuírem para o bom funcionamento da instituição, e para a manutenção de um ambiente de trabalho agradável.

Aos amigos que, de alguma forma, acompanharam momentos de minha saga em busca do título de Doutor em Ciências: Elielson, Jhon, Andrés, Day e Rubinho, obrigado!



*“For it is the duty of an astronomer to compose the history of the celestial motions  
through careful and expert study.”*

Nicolaus Copernicus (1473-1543), Polish astronomer.

*“Chaos is a friend of mine.”*

Bob Dylan, singer-songwriter.



## Resumo

*Caos e instabilidade*: conceitos diferentes, com distintas implicações, e por vezes correlacionados. Talvez, justamente por esse último fato, é comum deparar-se com considerações nas quais estas duas palavras aparecem (erroneamente) aplicadas como sinônimos. Na realidade, em muitos sistemas dinâmicos, a existência do primeiro não pressupõe a ocorrência, ainda que tardia, do segundo.

Faz-se uma pergunta: há ordem no caos? Soa absurda a expressão “ordem caótica”? Seria menos inadequado falar, então, sobre um “caos ordenado”?

Afirmo, de antemão, que o presente estudo não se ocupou, de forma alguma, em responder tais questões. Mas, ao fazê-las aqui, espero despertar no leitor a consciência de que, especialmente ao falar-se de temas como o caos, a possibilidade de esbarrar em assuntos que conduzem a divagações é real, dado o grau de complexidade e a abertura para diferentes tipos de abordagens e definições, que tendem a afetar a profundidade do assunto.

O que, de fato, exibimos nesta tese, é um estudo sobre a dinâmica de três sistemas exoplanetários. Três sistemas reais, catalogados em plataformas (*online*) de exoplanetas, e que apresentam na literatura estudos observacionais e análises teóricas das soluções orbitais. Tratam-se de objetos que exibem arquiteturas completamente distintas entre si, em termos das massas dos componentes, do número de corpos, das distâncias relativas e das atividades fenomenológicas que exibem. E por essa razão, também, constituíram bons objetos de estudo para aplicação de nossa metodologia.

Avaliamos o comportamento temporal de cada um destes sistemas através de integrações numéricas das equações de movimento, tanto para o conjunto de valores iniciais que determinam, segundo a literatura, a solução nominal de cada um deles, quanto para grandes conjuntos de condições iniciais, tomadas dos planos de fase característicos. Desde já,

enfatizamos que nossa principal ferramenta de trabalho consistiu nos métodos numéricos.

A partir das soluções numéricas, desenvolvemos uma análise acerca dos aspectos da estabilidade dinâmica de cada problema, baseados nas noções de estabilidade de Hill e de Lagrange da Mecânica Celeste. Aplicando a ideia da difusão caótica no plano das ações orbitais, introduzimos o conceito de entropia em dinâmica orbital, segundo a teoria da informação de Claude Shannon e, através desta ideia, construímos uma ferramenta computacional útil para a determinação quantitativa das escalas de tempo dentro das quais as instabilidades dos movimentos planetários se manifestam de maneira macroscópica no espaço de fase de tais objetos, acarretando eventos de natureza catastrófica e disruptiva (escapes e colisões entre corpos massivos).

Ao mesmo tempo, nossa análise voltou-se para a caracterização dos aspectos estocásticos desses sistemas, isto é, verificar o comportamento dinâmico do ponto de vista da perda de informação e previsibilidade. Em outras palavras, estudamos a manifestação de caos nas soluções. Ao final de cada aplicação apresentada, buscamos elucidar a existência (ou inexistência) de correlações entre cenários de larga estabilidade e o nível estocástico de cada arquitetura.

# Abstract

*Chaos* and *instability*: different concepts, with distinct implications, and which often are somehow correlated. Perhaps, it is exactly because of this fact that, here and there, one gets to find these two terms wrongly applied as synonyms of each other. Actually, there are lots of cases of dynamical systems in which the existence of one of them (the chaos) does not assume the occurrence of the other one, even after long times.

Let us put up with some questions: is there any order within the chaos? Does the expression “chaotic order” sound nonsensical? Would it be more suitable then to speak about an “orderly chaos”?

We must state, beforehand, that the present work does not intend to answer such questions at all. However, by putting them within this abstract, my intentions are to bring some thoughts upon the reader, by making him/her realize that, especially when we talk about such a subject like chaos, there is a strong possibility to ramble sometimes, since there is strong complexity in this matter, and the chance to digress into different kinds of approaches that affect the discussion.

What we do exhibit in this thesis is a study on the dynamics of three exoplanetary systems. Three real systems, actually registered in the proper catalogues, and which present in the literature their respective researches on their observational data and theoretical analysis over their nominal conditions. In this case, we are going to treat very different objects, with distinct architectures relative to masses, number of bodies, radial distances and their intrinsic phenomenology. For this reason, they constituted good opportunities to our methodology.

We evaluated the time evolution of each one, by applying numerical integrations of the equations of motion, considering the set of variables that define their nominal positions,

according to literature, as well as extending the analysis to a wide set of initial conditions, taken from the proper phase planes. By now, we emphasize that our main work tools are the numerical methods.

From the numerical solutions, we analysed the dynamical stability of each system, based on the Hill and Lagrange stability criteria. We applied the concept of chaotic diffusion over the action phase plane, and then introduced the notion of entropy in orbital dynamics, following the Claude Shannon's Information Theory. Using his ideas, we constructed a numerical tool useful to quantify the time-scales within which the instabilities of planetary motion begin to macroscopically affect the regimes on their phase space, thus inducing catastrophic events of disruptive nature (e.g. escapes or collisions between the bodies).

At the same time, our analysis is dedicated to characterize the stochasticity of such systems, which means to observe their dynamical behavior in the perspective of loss of information and predictability through time. In other words, we studied the chaos within their solutions. At the end of each application, we tried to elucidate the existence, or not, of correlations between scenarios of long stability and the stochastic levels of each configuration.

# Lista de Figuras

1.1	Estatística cumulativa mostrando o número de exoplanetas descobertos, no período compreendido entre 1995 e 2021. Fonte: The Extrasolar Planets Encyclopaedia ( <a href="https://exoplanet.eu">https://exoplanet.eu</a> ). . . . .	32
1.2	Diagrama massa-período ( $m, P$ ) dos exoplanetas catalogados na plataforma <code>exoplanet.eu</code> . As massas planetárias estão dadas em unidades de massa de Júpiter ( $M_{\text{Jup}}$ ), e os períodos orbitais em dias. Os pontos espalhados ainda apresentam uma escala de cores, parametrizada pelo valor da excentricidade planetária, nos casos em que sua estimativa é conhecida. . . . .	33
1.3	Distribuição de exoplanetas confirmados, segundo retirado do catálogo disponível no sítio <code>exoplanet.eu</code> , e plotados em um diagrama ( $m, P$ ). Os sistemas estão separados segundo o número $N_p$ de planetas que os compõem. Corpos detectados pelo método de velocidade radial estão indicados com um triângulo azul; aqueles detectados por trânsito ou TTV são indicados com círculo vermelho. A linha pontilhada destaca o período equivalente a 1 dia. . . . .	35
2.1	Sistemas de quatro corpos. À esquerda, os vetores de posição estão dados em coordenadas referenciadas ao baricentro do sistema, localizado no ponto <b>B</b> . À direita, os vetores de posição estão dados em termos das coordenadas de Jacobi: neste caso, o ponto <b>B</b> <sub>1</sub> designa o baricentro das massas $m_0$ e $m_1$ ; <b>B</b> <sub>2</sub> é o baricentro de $m_0, m_1$ e $m_2$ . . . . .	42

2.2	Integração numérica das equações de movimento do problema de 4-corpos restrito, para o caso de um sistema formado por Sol-522 Helga-Júpiter-Saturno (a) Evolução do semi-eixo de 522 Helga em $T = 10^7$ anos. (b) Evolução da excentricidade de 522 Helga em $T = 10^7$ anos. (c) Evoluções dos argumentos ressonantes $\theta_1^{(7:12)}$ e $\theta_2^{(7:12)}$ da RMM interna de razão 7:12 entre 522 Helga e Júpiter, mostradas para $2 \times 10^4$ anos. . . . .	46
2.3	Exemplo do comportamento temporal no caso em que se computa o expoente de Lyapunov (LCE, quadro superior) e o fator MEGNO ( $\langle Y \rangle$ , quadro inferior) para diferentes tipos de trajetórias. No eixo $x$ , mostramos em escala logarítmica o tempo de integração da solução; no eixo $y$ do painel de cima, vemos o logaritmo de $\chi$ calculado para a trajetória. No painel de baixo, o eixo das ordenadas mostra o fator $\langle Y \rangle$ também em escala log. A curva preta representa uma órbita regular do sistema HD 60532. A curva vermelha, por sua vez, representa uma órbita caótica para o mesmo sistema.	52
2.4	Diagrama de correlação para o inverso do expoente de Lyapunov, obtidos diretamente do cálculo do LCE, $\chi^{-1}$ , e indiretamente, a partir do MEGNO, $\chi_{\text{Meg}}^{-1} = T_i/[2\langle Y \rangle]$ , onde $T_i$ designa o $i$ -ésimo intervalo de integração. Cada conjunto de dados representa $10^4$ condições iniciais retiradas do espaço de fase $(a_2, e_2)$ do sistema HD 181433, integradas em três intervalos de tempo diferentes, conforme indicado na legenda. . . . .	53
2.5	Valores computados para o MEGNO e o LCE, conforme obtidos a partir de simulação numérica feita com o código <code>Ncorp</code> em $T = 10^8$ anos para o problema de quatro corpos restrito do asteroide Helga, considerando os gigantes Júpiter e Saturno como os perturbadores do movimento. O painel esquerdo apresenta o crescimento linear de $\langle Y \rangle$ , típico de trajetórias caóticas (Cincotta e Simó, 2000). À direita, vemos o comportamento do expoente de Lyapunov, derivado das equações variacionais (vermelho) e indiretamente, a partir do MEGNO (preto). . . . .	54

2.6	Mapas dinâmicos construídos sobre o plano representativo $(a_2, e_2)$ do sistema exoplanetário HD 181433. Em cada painel, uma grade de $10^4$ condições iniciais foi simulada por tempo máximo de $5 \times 10^6$ anos. Soluções instáveis estão indicadas por pontos amarelo-pretos. O mapa esquerdo mostra as estruturas de $\Delta e_2$ , isto é, a amplitude máxima de variação da excentricidade do corpo externo. À direita, plotamos em cores os valores de $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$	56
2.7	Diagrama esquemático apresentado em Shannon e Weaver (1949), mostrando o que Shannon descreve como um sistema de comunicação genérico.	59
2.8	Ilustração do espaço de fase generalizado $(I, J)$ , particionado em $q$ células bidimensionais. Os pontos vermelhos representam os valores de fase $(I(t), J(t))$ que preenchem $q_0 \leq q$ células da partição $\mathcal{P}(\Sigma, q)$ . . . . .	61
3.1	Ilustração esquemática do sistema planetário HD 20003, considerando a solução obtida por Udry et al. (2019). As trajetórias de cada corpo foram obtidas a partir de simulações feitas para $10^5$ anos, considerando um sistema de referência dado em coordenadas canônicas de Jacobi. A cruz ao centro representa o corpo central (estrela); os círculos verdes indicam as posições iniciais dos planetas, segundo dado pela Tabela 3.1. As linhas largas coloridas indicam um período completo para cada trajetória simulada. . . . .	67
3.2	Mapa dinâmico parametrizado por $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ , construído para uma grade de $400 \times 400 = 1.6 \times 10^5$ condições iniciais do plano de fase $(a_1, e_1)$ , e com tempo total de integração $T = 10^4$ anos. À esquerda, vemos o mapa completo, e à direita, mostramos uma ampliação dele, tomada para a região destacada pelo retângulo branco. As linhas verticais destacam as posições nominais das ressonâncias, nominalmente indicadas no alto de cada painel.	68

- 3.3 Soluções obtidas de longas integrações das condições iniciais C0 e C1 do sistema HD 20003. Veêm-se as evoluções do semi-eixo (painéis altos) e da excentricidade (painéis centrais) do planeta externo. Os painéis inferiores exibem os pontos integrados de cada solução, mostrados sobre no plano de  $(I_2, J_2)$ ,  $I_2 \sim \Lambda_2^2$ ,  $J_2 \sim \Gamma_2^2$ . As linhas vermelhas tracejadas indicam os limites da partição que é construída para mensurar a entropia Shannon: nos painéis superiores e centrais, as linhas mostram as fronteiras da partição no espaço de  $a_2$  e  $e_2$ ; nos painéis inferiores, as linhas delimitam a “caixa” da partição no plano  $(I_2, J_2)$ . . . . . 69
- 3.4 Solução de C0 integrada em  $10^6$  anos. Estão mostrados a evolução das excentricidades (esquerda) e do ângulo secular (direita),  $\Delta\varpi$ , nos painéis superiores; e abaixo, vemos o comportamento temporal da combinação comensurável de movimentos médios de razão 3:1,  $n_1 - 3n_2$ , à esquerda; e à direita, a evolução LCE, utilizando o cálculo direto das equações variacionais (preto), e também obtido a partir da computação do MEGNO (vermelho). 70
- 3.5 Diagramas de correlações entre os valores estimados para os tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , e distintas parametrizações numéricas intrínsecas da rotina de cálculo da entropia Shannon. No painel superior esquerdo, a correlação é mostrada entre  $\tau(S)$  e o número total de pontos gerados durante a integração  $n = T/h$ ; à direita, vemos a correlação entre  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e o tamanho do ensemble de sistemas-fantasma,  $n_{\text{ens}}$ . Abaixo, à esquerda, vemos a correlação de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e o número de células da partição,  $q_a$  e  $q_e$ ; à direita, a correlação é mostrada para  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e os intervalos  $(\delta a, \delta e)$ , que definem o limite da área na qual toma-se o ensemble. . . . . 72

3.6	Histogramas construídos a partir de centenas de simulações das soluções para condições iniciais tomadas numa vizinhança “infinitesimal” de C1. Em azul, exibimos a contagem dos tempos de disrupção, $t_{\text{dis}}$ , gerados de 841 simulações feitas a partir de uma malha de $29 \times 29 = 841$ condições tomadas sobre o plano $(a_1, e_1)$ . Em laranja, a contagem é feita para as 882 estimativas de tempos de instabilidade $\tau_{\text{inst}}$ , as mesmas que foram mostradas anteriormente, na Figura 3.5. As linhas tracejadas mostram os valores esperados (médias) $\mu$ para cada conjunto de dados, computados admitindo-se a forma log-normal das distribuições. . . . .	74
3.7	Mapas dinâmicos sobre o plano de fase $(a_1, e_1)$ , para a vizinhança próxima da condição nominal do sistema. À esquerda, os resultados estão parametrizados pelo $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . À direita, mostramos um mapa de tempos de instabilidade $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Ambos os mapas foram contruídos a partir de uma grade de $100 \times 100$ condições iniciais, com cada solução integrada por $T = 5 \times 10^4$ anos. No mapa MEGNO, os pontos vermelhos na porção superior do quadro indicam trajetórias instáveis em $t < T$ . . . . .	75
4.1	Ilustração esquemática do sistema planetário HD 181433, considerando a solução publicada em Horner et al. (2019). As trajetórias de cada corpo foram obtidas a partir de simulações feitas em um intervalo de 5000 anos, considerando um sistema de referência dado em coordenadas canônicas de Jacobi. A estrela central corresponde à posição da origem do plano, $(X = 0, Y = 0)$ ; os círculos lilás indicam as posições iniciais dos planetas mais massivos, segundo dado pela Tabela 4.1, com as linhas largas coloridas indicando um período completo para as suas respectivas trajetórias. . . . .	78
4.2	Evolução dos semi-eixos maiores e excentricidades para os dois planetas mais massivos do sistema HD 181433, considerando modelos de três e quatro corpos (vide legenda, Cincotta et al. (2021)). . . . .	79

- 4.3 Integração de  $10^8$  anos da condição nominal do sistema, considerando os valores orbitais dados da Table 4.1. Vemos a evolução para os semi-eixos e excentricidades nos painéis superiores esquerdo e direito, respectivamente. Ao centro da figura, exibimos a evolução de  $a_2$  (esquerda) e  $e_2$  (direita) para um intervalo mais curto, de  $3 \times 10^5$  anos. O painel inferior apresenta o comportamento da função  $\chi$ , cujo limite assintótico define o LCE da solução. 80
- 4.4 Mapas dinâmicos de MEGNO (superior) e  $\tau_{\text{inst}}(S)$  (inferior) construídos para uma grade de  $100 \times 100 = 10^4$  condições iniciais tomadas na vizinhança da posição nominal do sistema HD 181433, sobre os planos  $(a_2, e_2)$ , à esquerda, e  $(a_2, \mathcal{M}_2)$ , à direita. Os mapas MEGNO foram obtidos de integrações feitas dentro de  $T = 10^6$  anos; os mapas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  compreendem simulações feitas dentro de um intervalo dez vezes menor. O ponto preto identifica o sistema real (Tabela 4.1), e as linhas pretas indicam a posição nominal da RMM 7:1. Os símbolos de “x” indicam posições de (prováveis) soluções de equilíbrio estáveis (branco) e intáveis (preto) associadas à RMM 7:1 (Alves Silva et al., 2021) . . . . . 81
- 4.5 Distribuição dos tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$  para um conjunto de  $10^4$  condições iniciais tomadas no intervalo  $4.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 7.0 \text{ UA}$ . As linhas pretas indicam a posição das ressonâncias principais identificadas nesse intervalo, e a linha amarela destaca a posição nominal do sistema HD 181433. Os quadrados brancos representam os tempos de disrupção  $t_{\text{dis}}$  conforme obtidos através de simulações diretas, posteriormente publicados em Cincotta et al. (2021). . . . . 84
- 4.6 *Superior*: distribuição dos valores de  $\langle Y \rangle$ , em escala logarítmica, para um conjunto de 1000 condições iniciais tomadas dentro do intervalo  $4.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 7.0 \text{ UA}$ . *Inferior*: para o mesmo conjunto de soluções, mostramos as amplitudes máximas de variação da excentricidade  $e_2$ . As linhas verticais escuras indicam as posições nominais de ressonâncias presentes, devidamente identificadas no alto da figura. A linha amarela denota a posição real do sistema HD 181433, vizinha à RMM 7:1. Cruzes vermelhas indicam condições intáveis em  $t < 10^5$  anos. . . . . 85

4.7	(Painéis superiores) Evolução temporal do semi-eixo $a_2$ para as condições A1, A2 e A3, obtidas como soluções numéricas integradas com o código <code>Ncorp</code> . Cada painel apresenta um conjunto de soluções (curvas marrons) nas quais um pequeno desvio inicial foi tomado ao redor da respectiva condição nominal (curva preta). (Painéis inferiores) Resultados do cálculo numérico da função $\chi(t)$ . . . . .	87
4.8	Diagramas de correlação entre as estimativas de tempos de instabilidade $\tau_{\text{inst}}(S)$ e os tempos de disrupção $t_{\text{dis}}$ advindos de integrações diretas (Alves Silva et al., 2021). Os conjuntos de dados foram obtidos a partir de simulações de condições iniciais construídas em intervalos “infinitesimais” ao redor das posições nominais de A1, A2 e A3. . . . .	89
4.9	(a) Mapa dinâmico dos tempos de disrupção ( $t_{\text{dis}}$ ) gerados das 2500 soluções para A2, mostradas no painel central da Figura 4.8. O ponto preto ao centro indica a posição nominal da condição A2 (Tabela 4.2). (b) Mapa dinâmico dos tempos de instabilidade ( $\tau_{\text{inst}}(S)$ ), também advindos das 2500 simulações mostradas no painel do meio da Figura 4.8. (c) Histograma relativo aos resultados do mapa exibido em (a). (d) Histograma relativo aos resultados do mapa exibido em (b). . . . .	90
4.10	Mapas dinâmicos construídos nos espaços de fase $(a_2, e_2)$ (superior) e $(a_2, \mathcal{M}_2)$ (inferior), obtidos a partir de simulações numéricas de $10^4$ condições iniciais tomadas sobre os intervalos mostrados, computadas em $T = 10^5$ anos: os passo das grades foram definidos em 0.004 ua para $a_2$ , 0.001 em $e_2$ e 0.5 graus em $\mathcal{M}_2$ . (a)-(b) mapas MEGNO parametrizados por $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . (c)-(d) mapa de estrutura de $\Delta e_2$ . (e)-(f) mapas de $\tau_{\text{inst}}$ derivados a partir das medidas de difusão $D_S$ obtidas da entropia Shannon $S$ . Os pontos pretos indicam a posição nominal da condição fictícia A2. As linhas verticais pretas denotam a posição exata da RMM 4:1. Marcadores em cor branca, nos mapas inferiores, indicam as soluções de equilíbrio da ressonância 4:1. . . . .	92

5.1	Ilustração esquemática do modelo de quatro planetas para o sistema Gliese 876, considerando a solução obtida por Millholland et al. (2018). As trajetórias de cada corpo foram obtidas a partir de simulações feitas para 500 anos, considerando um sistema de referência dado em coordenadas canônicas de Jacobi. O ponto vermelho representa o corpo central (estrela); os pontos verde-escuro indicam as posições iniciais dos planetas, segundo dado pela Tabela 5.1. As linhas largas coloridas indicam um período completo para cada trajetória. . . . .	97
5.2	Comparação entre diferentes soluções disponíveis na literatura: Rivera et al. (2010) (preto), Batygin et al. (2015) (vermelho) e Millholland et al. (2018) (verde). Cada solução foi integrada em $T = 10^7$ anos. Os painéis à esquerda mostram a evolução das excentricidades dos planetas 1 (superior), 2 (centro) e 3 (inferior). O painel maior, à direita, apresenta o comportamento temporal para o coeficiente $\chi(t)$ . . . . .	99
5.3	Evolução das excentricidades (a) $e_c$ , (b) $e_b$ e (c) $e_e$ , e dos ângulos principais do problema ressonante, conforme definidos nas Equações (5.1) a (5.7). Consideramos a solução proposta por Millholland et al. (2018) como condição inicial. Nos quadros, mostramos intervalos curtos de evolução, de no máximo 150 anos. . . . .	101
5.4	Projeções sobre os planos de fase de coordenadas polares, obtidas para uma evolução orbital integrada em $T = 5 \times 10^8$ anos. Nos quadros superiores, vemos à esquerda o comportamentos do sistema exibido sobre os planos $(e_1 \cos \theta_1, e_1 \sin \theta_1)$ ; ao centro, $(e_2 \cos \theta_2, e_2 \sin \theta_2)$ ; e à direita, $(e_2 \cos \Delta\varpi_{(1,2)}, e_2 \sin \Delta\varpi_{(1,2)})$ . Nos painéis inferiores, seguindo a mesma ordem esquerda-centro-direita, exibimos $(e_3 \cos \theta_3, e_3 \sin \theta_3)$ , $(e_3 \cos \theta_4, e_3 \sin \theta_4)$ , e $(e_3 \cos \Delta\varpi_{(2,3)}, e_3 \sin \Delta\varpi_{(2,3)})$ . . . . .	104
5.5	Projeção da trajetória do sistema, considerando a condição nominal integrada em $T = 10^4$ anos, sobre o plano de fase $d\phi_{\text{Lap}}/dt$ vs $\phi_{\text{Lap}}$ . O mapa de cor está parametrizado pelo valor da excentricidade do planeta “e”, $e_3$ , ao longo da evolução orbital. Verificou-se que o espaço de fase, neste caso, foi preenchido em um curto espaço de tempo. . . . .	105

5.6	<i>Esquerda</i> : evolução temporal de $e_1$ (alto), $e_2$ (meio) e $e_3$ (baixo), integrada em $10^4$ anos e exibida dentro de um intervalo de 50 anos. É mostrado o comportamento considerando uma integração numérica simples (preto), e sobreposta a ela exibimos o resultado de uma simulação após aplicação de filtragem digital (filtro “passa-baixo” para frequências). <i>Direita</i> : espectros de potência obtidos a partir de análise de Fourier dos sinais filtrados de cada excentricidade. . . . .	107
5.7	Espectros de potência obtidos a partir dos sinais das excentricidades (Figura 5.6 após remoção de parte do ruído branco. . . . .	108
5.8	Mapas dinâmicos no espaço de condições iniciais $(a_3, e_3)$ . O código de cores é dado de acordo com os valores computados para o indicador caótico, neste caso, $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . Regiões vermelhas denotam trajetórias instáveis em tempos inferiores ao intervalo de integração $T = 10^4$ anos. A condição nominal do planeta 3 está marcada com o círculo cinza. No quadro inferior, é exibida uma vista ampliada do mapa completo mostrado no quadro de cima.	109
5.9	Ampliação do mapa dinâmico mostrado na Figura 5.8. Estruturas próprias de movimento regular e quasi-periódico aparecem ao centro, em cores azul e branca, respectivamente. Em vermelho, está indicado o domínio caótico, cujos tempos de Lyapunov são de, no máximo, 25 anos. A condição nominal está dentro deste mar hiper-caótico, marcada pelo ponto cinza. Dentro do domínio regular azul, marcamos com quadrados de cor magenta três condições iniciais, propriamente identificadas ao longo do texto, e que foram integradas individualmente em nosso estudo. . . . .	111
5.10	Mapas dinâmicos mostrando a estrutura do plano de condições iniciais $(a_3, e_3)$ , considerando o domínio circunvizinho à condição nominal, a exemplo do mapa de caos da Figura 5.9. As integrações estão parametrizadas, em código de cor indicado, em termos das semi-amplitudes de oscilação dos argumentos $\theta_4$ (RMM 4:1 entre o par 2-3) e $\Delta\varpi_{(2,3)}$ . Sendo assim, a cor amarela representa as trajetórias de regime circulatório. . . . .	112

- 5.11 *Esquerda*: Projeções das trajetórias integradas em  $T = 10^6$  anos a partir das condições iniciais A, B e C, sobre o plano de fase de coordenadas polares generalizadas  $(e_3 \cos \beta, e_3 \sin \beta)$ . De acordo com as legendas, definimos  $\beta = \theta_3$  pelos pontos pretos, e  $\beta = \Delta\varpi_{(2,3)}$  pelos pontos verdes. Próximo à origem  $(0,0)$ , os pontos pretos sobrepõem os pontos verdes. Assim, de fato o argumento  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  é caracterizado por regimes de circulação quando  $e_3$  aproxima-se de zero, semelhantemente ao que ocorre com a condição nominal do sistema. *Direita*: comportamento temporal da computação do LCE de cada solução. Em vermelho, aparecem os valores do indicador caótico derivado a partir da relação LCE-Megno. . . . . 113
- 5.12 *Esquerda*: mapa de estrutura para espaço de condições iniciais  $(a_3, e_3)$ , parametrizado pela semi-amplitude de oscilação do ângulo de Laplace. Cada trajetória foi integrada por  $10^4$  anos, sendo tomada de uma malha de  $200 \times 200$  condições iniciais. Órbitas intáveis estão coloridas em cor rósea. A condição nominal do sistema aparece marcada pelo ponto verde. *Direita*: evolução de longo período do argumento  $\phi_{\text{Lap}}$ , integrada numericamente em  $10^8$  anos, considerando a condição inicial nominal (Tabela 5.1). . . . . 114
- 5.13 Tempos de instabilidade estimados para um conjunto de valores iniciais de  $a_3$ . Os demais valores orbitais foram mantidos fixos segundo a condição nominal dada pela Tabela 5.1. Quadrados pretos mostram os tempos de ruptura ( $t_{\text{dis}}$ ) obtidos diretamente de integrações feitas com o código `Ncorp`, para um tempo de integração  $T = 10^8$  anos. Os círculos vermelhos indicam os valores de tempos de instabilidade obtidos a partir da difusibilidade  $D_S$ ,  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Já os círculos verdes representam as estimativas de tempos de instabilidade calculadas a partir de  $d(\ln q_0)/dt$ , isto é, a derivada temporal do logaritmo do número de células ocupadas dentro da partição. . . . . 116

- 5.14 *Esquerda* Evolução temporal de  $\Lambda^2 = a_3^2(1 + (1 - e_3^2)^2)$ , obtida a partir de uma simulação numérica da condição inicial por aproximadamente  $5.5 \times 10^8$  anos. A linha laranja exibe a taxa de difusão média, determinada a partir de regressão linear (mínimos quadrados) feita sobre os dados brutos (curva azul), e que corresponde a aproximadamente  $3.6 \times 10^{-12}$  UA/ano. *Direita:* os círculos vermelhos representam os valores estimados via entropia Shannon para a difusividade  $D_S$ , calculados através da equação (2.23), e obtidos para o conjunto de condições iniciais de  $a_3$  indicado no eixo  $x$ ; analogamente, os círculos verdes indicam os valores estimados para o coeficiente de difusão  $D_{q_0}$ , para o mesmo conjunto de condições iniciais (veja o Apêndice para detalhes acerca da distinção entre  $D_S$  e  $D_{q_0}$ ). A taxa de difusão  $D$ , computada a partir da simulação exibida no painel superior, está indicada pelo círculo maior de cor azul. . . . . 118
- 5.15 Mapas de tempos de instabilidade, construídos para uma grade de  $200 \times 200$  condições iniciais do plano  $(a_3, e_3)$ , integrada em  $T \sim 10^4$  anos. Cada solução foi integrada conjuntamente com um ensemble de 5 trajetórias-fantasma. O ponto branco identifica a posição nominal do sistema. *Esquerda:* mapa de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . *Direita:* mapa de  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$ . . . . . 120
- 5.16 Mapas dinâmicos contruídos sobre o plano de fase  $(a_2, e_2)$ , utilizando uma grade de  $200 \times 200$  condições iniciais. Cada uma delas foi integrada por um tempo máximo  $T = 10^4$  anos. À esquerda, é exibido um mapa MEGNO, parametrizado pelo tempo de Lyapunov  $T_L$ . Ao centro, vemos as estruturas das semi-amplitudes de oscilação do argumento de Laplace,  $\phi_{\text{Lap}}$ . Finalmente, à direita, temos um mapa de tempos de instabilidade,  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . A condição nominal do sistema aparece indicada pelo ponto vermelho. A cruz verde localiza uma determinada condição inicial singular, simulada individualmente. . . . . 121

5.17	<p>Projeção de uma trajetória integrada em <math>T = 10^7</math> anos, sobre o plano de fase de coordenadas polares. Para tanto, consideramos a condição inicial indicada por uma cruz verde nos mapas da Figura 5.16. Nos quadros, vemos o comportamento do sistema exibido através dos planos <math>(e_3 \cos \theta_3, e_3 \sin \theta_3)</math> (à esquerda), <math>(e_3 \cos \theta_4, e_3 \sin \theta_4)</math> (ao centro), e <math>(e_3 \cos \Delta\varpi_{(2,3)}, e_3 \sin \Delta\varpi_{(2,3)})</math> (à direita). . . . .</p>	122
A.1	<p>Ilustração de uma partição considerando o plano de fase genérico <math>(a, e)</math>. As regiões coloridas emulam os valores de fase da trajetória que vão, ao longo do tempo, preenchendo as células da partição. Os círculos preenchidos de cor vermelha representam pontos que povoam o interior da caixa de partição. Os círculos abertos de contorno vermelho são pontos da trajetória que “caem” em região externa aos limites da partição, enquanto os pontos preenchidos em azul esquematizam o processo de reinserção destes últimos de volta para a partição. O ponto preto ao centro representa a condição inicial, <math>(a_0, e_0)</math>. . . . .</p>	145
A.2	<p><i>Painel esquerdo:</i> evolução temporal do semi-eixo <math>a_1</math>, considerando o problema planetário estrela+2 planetas do sistema HD 20003. São apresentadas quatro trajetórias obtidas a partir da simulação de distintas condições iniciais. <i>Painel direito:</i> evolução da entropia normalizada <math>S' = S/\ln q</math>, para cada uma das quatro condições iniciais. . . . .</p>	149
A.3	<p>Evolução da condição chamada A1 para o sistema HD 20003, considerando integrações individuais de condições muito próximas (painéis à esquerda), e tomando em conta um ensemble de 5 “sistemas-fantasmas” além da condição nominal (painéis à direita), mostrados através das curvas cinzas. Neste último caso, o sistema foi reescalado por um fator <math>\epsilon = 1\text{AU}/a_2 \approx 11.5</math>. . . .</p>	151
A.4	<p>Ilustração esquemática do conceito por trás da relação (A.14), conforme deve ser compreendido dentro do espaço de fase <math>(I, J)</math>. Cada ponto representa o centro de uma célula ocupada por um valor de fase, com cada célula definindo um elemento distinguível das demais. . . . .</p>	153

A.5 Evolução temporal de cinco órbitas tomadas do espaço de fase do sistema HD 20003. Cada trajetória foi integrada por  $10^5$  anos. (a) Evolução da entropia Shannon para cada condição, segundo informado na legenda.  $S$  é calculada a partir da Equação (A.12). (b) Evolução do logaritmo natural do número de células ocupadas,  $\ln q_0$ . Ambos os painéis apresentam os resultados normalizados pelo número total de células da partição,  $q = 1.6 \times 10^5$ . 154



## Lista de Tabelas



# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	31
1.1 Uma visão geral acerca de sistemas exoplanetários . . . . .	31
1.2 Ressonância de movimentos médios . . . . .	37
1.3 Caos e estabilidade . . . . .	38
2. <i>Teoria e ferramentas de análise</i> . . . . .	41
2.1 Formalismo hamiltoniano para o problema de $(N_p + 1)$ -corpos . . . . .	41
2.2 Integração das equações de movimento . . . . .	44
2.3 Indicadores de caos . . . . .	47
2.3.1 Método de análise espectral . . . . .	47
2.3.2 LCE - <i>Lyapunov Characteristic Exponent</i> . . . . .	49
2.3.3 MEGNO - <i>Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits</i> . . . . .	50
2.3.4 A correspondência entre o MEGNO e o LCE . . . . .	51
2.4 Indicadores de estrutura . . . . .	55
2.5 Entropia: breve revisão . . . . .	57
2.6 A teoria da informação de Claude Shannon . . . . .	58
2.6.1 Entropia Shannon aplicada à dinâmica planetária . . . . .	59
3. <i>HD 20003</i> . . . . .	65
3.1 Experimentos numéricos com a entropia $S$ . . . . .	71
3.2 Mapas dinâmicos de tempos de instabilidade . . . . .	75
4. <i>HD 181433</i> . . . . .	77
4.1 Análise de estabilidade: condições iniciais integradas sobre um segmento . . . . .	83

4.1.1	A dispersão local de condições iniciais próximas: $t_{\text{dis}}$ contra $\tau_{\text{inst}}(S)$	86
4.1.2	Separatriz e difusão anômala . . . . .	90
5.	<i>Gliese 876</i> . . . . .	95
5.1	Comparação entre as soluções da literatura . . . . .	97
5.2	Ressonância de Laplace . . . . .	100
5.3	O comportamento caótico da solução nominal . . . . .	106
5.3.1	Análise do espaço de fase de GJ 876e . . . . .	109
5.4	Estimativas de tempos de instabilidade aplicando entropia Shannon . . . . .	115
5.4.1	Simulações sobre um segmento de condições iniciais de $a_3$ . . . . .	115
5.4.2	Análise do comportamento difusivo da condição nominal . . . . .	117
5.4.3	Mapas de instabilidade para o corpo menos massivo . . . . .	119
5.4.4	Mapas de instabilidade para o corpo mais massivo . . . . .	121
6.	<i>Conclusões</i> . . . . .	125
	<i>Referências</i> . . . . .	131
	<i>Apêndice</i>	141
A.	<i>Entropia Shannon</i> . . . . .	143
A.1	Medição da entropia $S$ . . . . .	143
A.1.0.1	Fronteiras da partição $\mathcal{P}(\Sigma, q)$ . . . . .	144
A.1.0.2	Aproximação ergódica . . . . .	147
A.1.1	<i>Ensemble</i> de trajetórias e o reescalamiento das órbitas . . . . .	150
A.1.2	Estimativa da difusividade $D_S$ e do tempo de instabilidade $\tau_{\text{inst}}$ . . . . .	152
A.1.3	Difusividade $D_{q_0}$ . . . . .	154

## Introdução

### 1.1 Uma visão geral acerca de sistemas exoplanetários

Os *exoplanetas* ocupam uma área bastante particular dentro da Astronomia. Como o próprio termo deixa claro, tratam-se de planetas localizados fora dos limites do Sistema Solar, e por isso também são denominados planetas *extra-solares*. É um domínio de pesquisa bastante fértil, e que atualmente desperta o interesse de diferentes campos da ciência, entre os quais a Biologia, a Física, a Química, e áreas das Engenharias, apenas para citar alguns exemplos. É um tópico de trabalho que aborda o estudo de objetos de difícil observação e caracterização.

No final da segunda metade do século passado, muitos projetos se ocuparam da tentativa de buscar planetas orbitando estrelas próximas. Wolszczan e Frail (1992) relataram aquela que é considerada, ainda hoje, a primeira<sup>1</sup> descoberta de planetas extrasolares, neste caso, orbitando uma estrela do tipo pulsar, chamado PSR B1257+12. Poucos anos mais tarde, Mayor e Queloz (1995) apresentaram a primeira descoberta de um planeta orbitando uma estrela de sequência principal<sup>2</sup>, 51 Pegasi, sendo o planeta, neste caso, denominado 51 Pegasi b (abreviadamente, 51 Peg b). Desde então, o número de planetas descobertos tem crescido vertiginosamente, conforme ilustrado na Figura 1.1. Tal crescimento foi impulsionado

---

<sup>1</sup> Possivelmente, a primeira evidência de um exoplaneta tenha sido obtida muito tempo antes, em 1917, aparecendo na forma de poluição de elementos pesados, detectada na fotosfera de uma anã-branca (Zuckerman, 2015). O texto dedicado a explicar as curiosidades deste episódio pode ser encontrado no endereço [nasa.gov/feature/jpl/overlooked-treasure-the-first-evidence-of-exoplanets](https://nasa.gov/feature/jpl/overlooked-treasure-the-first-evidence-of-exoplanets).

<sup>2</sup> Sequência principal é o nome dado à fase evolutiva na qual a estrela executa, essencialmente, fusão termonuclear de hidrogênio em seu núcleo, constituindo assim sua principal fonte de energia. O Sol, por exemplo, encontra-se na sequência principal de sua evolução.

nado, obviamente, pelo avanço tecnológico dos métodos de detecção e, conseqüentemente, pela alta cobertura de dados que vem sendo obtida a partir das últimas missões, tanto *in situ* quanto espaciais.

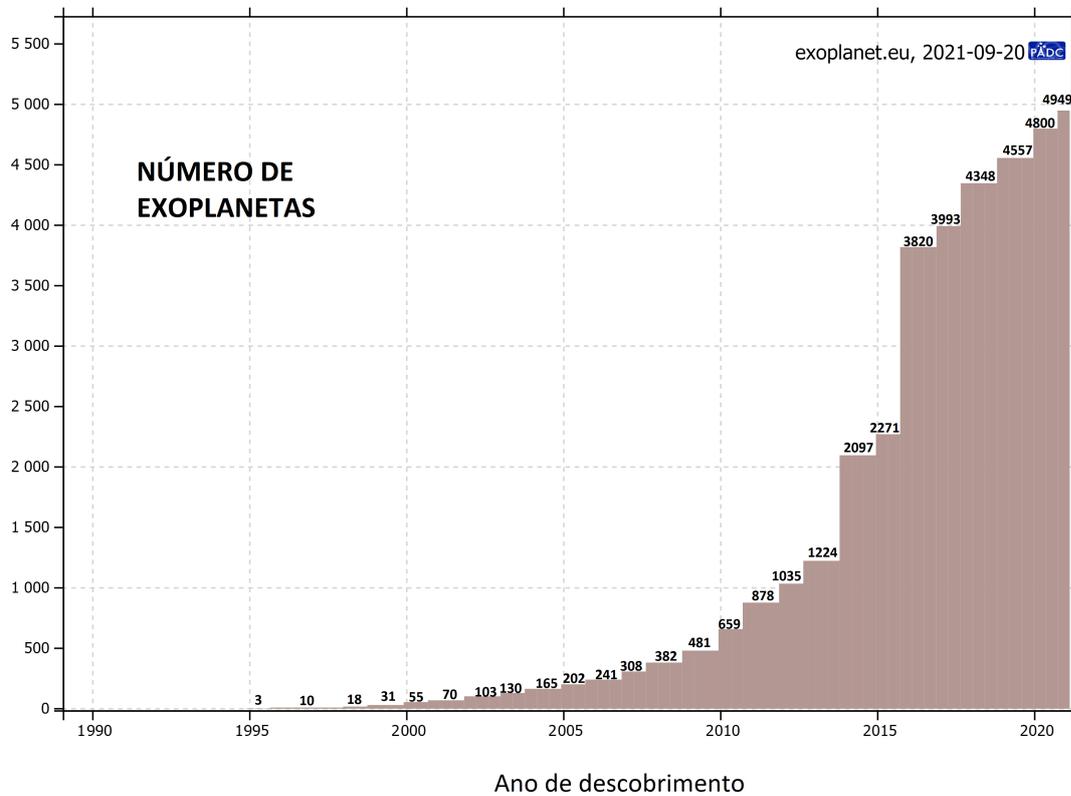


Figura 1.1: Estatística cumulativa mostrando o número de exoplanetas descobertos, no período compreendido entre 1995 e 2021. Fonte: The Extrasolar Planets Encyclopaedia (<https://exoplanet.eu>).

O histograma mostrado na Figura 1.1 apresenta, de forma cumulativa, a quantidade de exoplanetas descobertos entre 1995 e 2021 (no canto superior direito, é possível verificar a data em que o resultado foi gerado através da plataforma digital `exoplanet.eu`). À época da coleta desses dados, o número chegava a quase 5000 exoplanetas<sup>3</sup>. Hoje, esse número certamente supera a casa de 5000. A grande maioria foi detectada de forma indireta, por meio da medição da variação da velocidade radial da estrela em relação ao baricentro

<sup>3</sup> Dentro dessa quantidade, encontram-se planetas com massas que incluem desde sub-Terras,  $\sim 0.1 M_{\oplus}$ , até corpos supermassivos, do tipo anã-marrom. É importante salientar que, embora as anãs-marrons sejam objetos de classe subestelar, diferente dos planetas gigantes (super-jupiteres), elas se comportam de forma dinamicamente semelhante a eles, e a separação destes dois grupos, em termos de massa e estrutura, não é definida de maneira rigorosa entre os especialistas. Perryman (2000), por exemplo, menciona o intervalo de massa que compreende de 13 a 80 massas de Júpiter ( $M_{\text{Jup}}$ ) para classificar um objeto como uma possível anã-marrom.

do sistema (essa detecção é obtida observando-se o deslocamento das linhas espectrais da estrela devido ao efeito Doppler). Outros métodos de detecção incluem, por exemplo, o trânsito estelar, as microlentes gravitacionais, e o imageamento direto (veja Perryman (2000) para uma exposição adequada acerca deste tema).

A Figura 1.2 apresenta a distribuição dos exoplanetas catalogados na plataforma do sítio `exoplanet.eu`, e distribuídos em um diagrama Massa *vs* Período, no qual os valores estimados para as massas estão dados em unidade de massa de Júpiter ( $M_{\text{Jup}}$ ), e os respectivos períodos orbitais observados ( $P$ ) são dados em dias. A escala de cores ainda apresenta os valores estimados para as excentricidade das órbitas (os círculos pretos representam os casos onde esse valor não é conhecido na literatura).

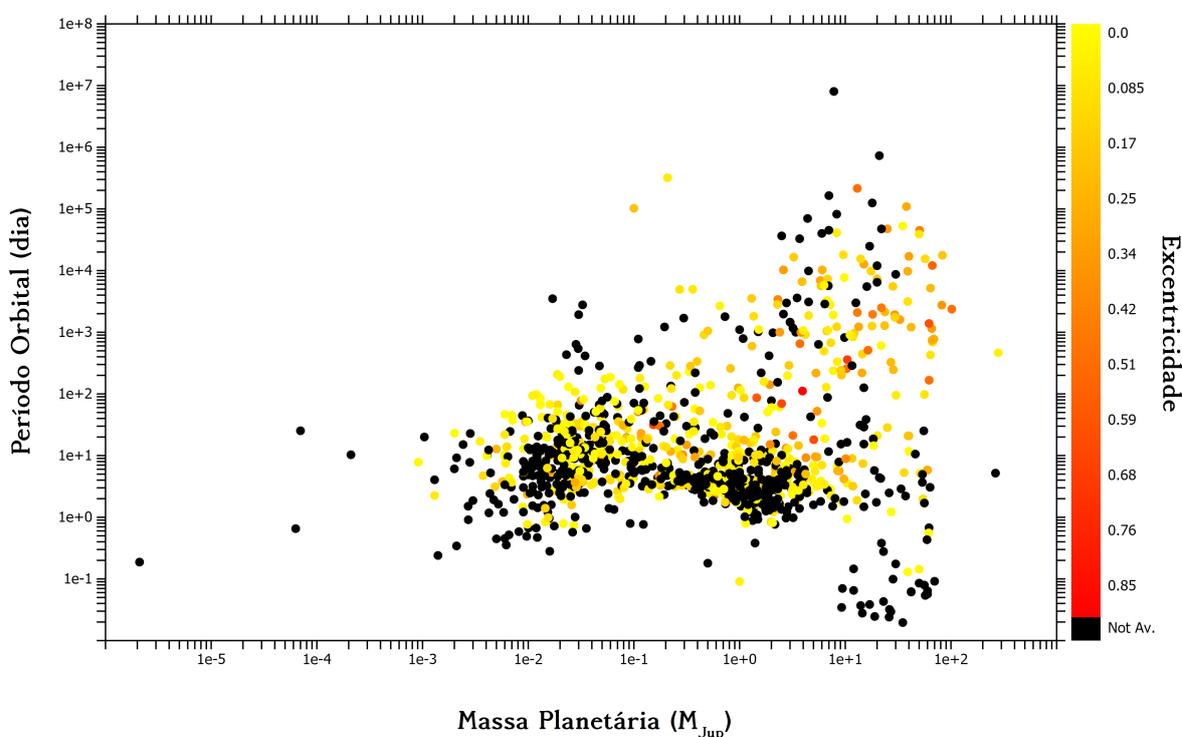


Figura 1.2: Diagrama massa-período ( $m, P$ ) dos exoplanetas catalogados na plataforma `exoplanet.eu`. As massas planetárias estão dadas em unidades de massa de Júpiter ( $M_{\text{Jup}}$ ), e os períodos orbitais em dias. Os pontos espalhados ainda apresentam uma escala de cores, parametrizada pelo valor da excentricidade planetária, nos casos em que sua estimativa é conhecida.

Note que o grande acúmulo de planetas descobertos ocorre na parte central do painel, abrangendo desde corpos de massas comparáveis à Terra ( $\sim 10^{-2} M_{\text{Jup}}$ ) até super-jupiteres com algumas dezenas de  $M_{\text{Jup}}$ , e cujos períodos vão de algumas unidades a milhares de dias (isto corresponde a cerca de alguns anos). São objetos de baixa excentricidade, nos

casos em que esta é conhecida. Na porção direita do quadro, há maior dispersão dos dados, indicando corpos supermassivos de períodos curtos e planetas gigantes de longos períodos. Curiosamente, os gigantes de longos períodos estão identificados com as órbitas mais excêntricas (pontos que se aproximam do vermelho).

Um fato destacável é que cerca de 60% dos sistemas exoplanetários observados incluem arquiteturas de apenas um único planeta conhecido, isto é,  $N_p = 1$ . Em contrapartida, as novas missões de observação têm contribuído para o crescimento vertiginoso do número observado de sistemas multi-planetários ( $N_p > 1$ ). A Figura 1.3 mostra outras distribuições para os exoplanetas catalogados em `exoplanet.eu`, construídas novamente como diagramas no plano massa-período ( $m, P$ ). Neste caso, a massa está dada em unidades de massas terrestres ( $M_\oplus$ ); o período  $P$  continua dado em dias. Cada quadro está separando as populações de sistemas de acordo com a quantidade de planetas detectados: no gráfico superior esquerdo, estão plotados a distribuição dos sistemas de um único planeta; no canto diametralmente oposto (inferior direito), vemos a distribuição para sistemas com  $N_p > 3$ . Símbolos distintos identificam diferentes métodos de detecção: corpos detectados por variação de velocidade radial da estrela central estão plotados com triângulos azuis, enquanto que os planetas descobertos por trânsito ou TTV (variação do tempo de trânsito) são mostrados com círculos vermelhos. No primeiro quadro, os quadrados pretos representam planetas nos quais supõe-se ocorrer processos de desintegração.

Se consideramos somente os parâmetros massa e composição físico-química, a tipificação mais simples para planetas incluirá (i) os gigantes gasosos (ou jovianos), planetas com dimensões e características físicas semelhantes à Júpiter; (ii) os planetas netunianos, de dimensões próximas a Netuno e Urano, e que apresentam, em geral, composições mistas em seu interior, com atmosferas mais externas dominadas por hélio e hidrogênio, e núcleos rochosos; (iii) as super-Terras, tipicamente corpos rochosos que podem ou não apresentar atmosfera, e em termos de massa, são mais pesados que a Terra, porém menos massivos que Netuno; e (iv) os planetas terrestres (ou telúricos), que incluem corpos das dimensões da Terra e menores, de composição semelhante ao nosso planeta, basicamente silicatos, minerais, carbono e (nos casos mais interessantes) água, e que não necessariamente apresentam atmosferas.

Nos painéis da Figura 1.3, particularmente no caso  $N_p = 1$  (quadro superior esquerdo), é interessante notar que a distribuição de pontos se divide em três zonas de acúmulo

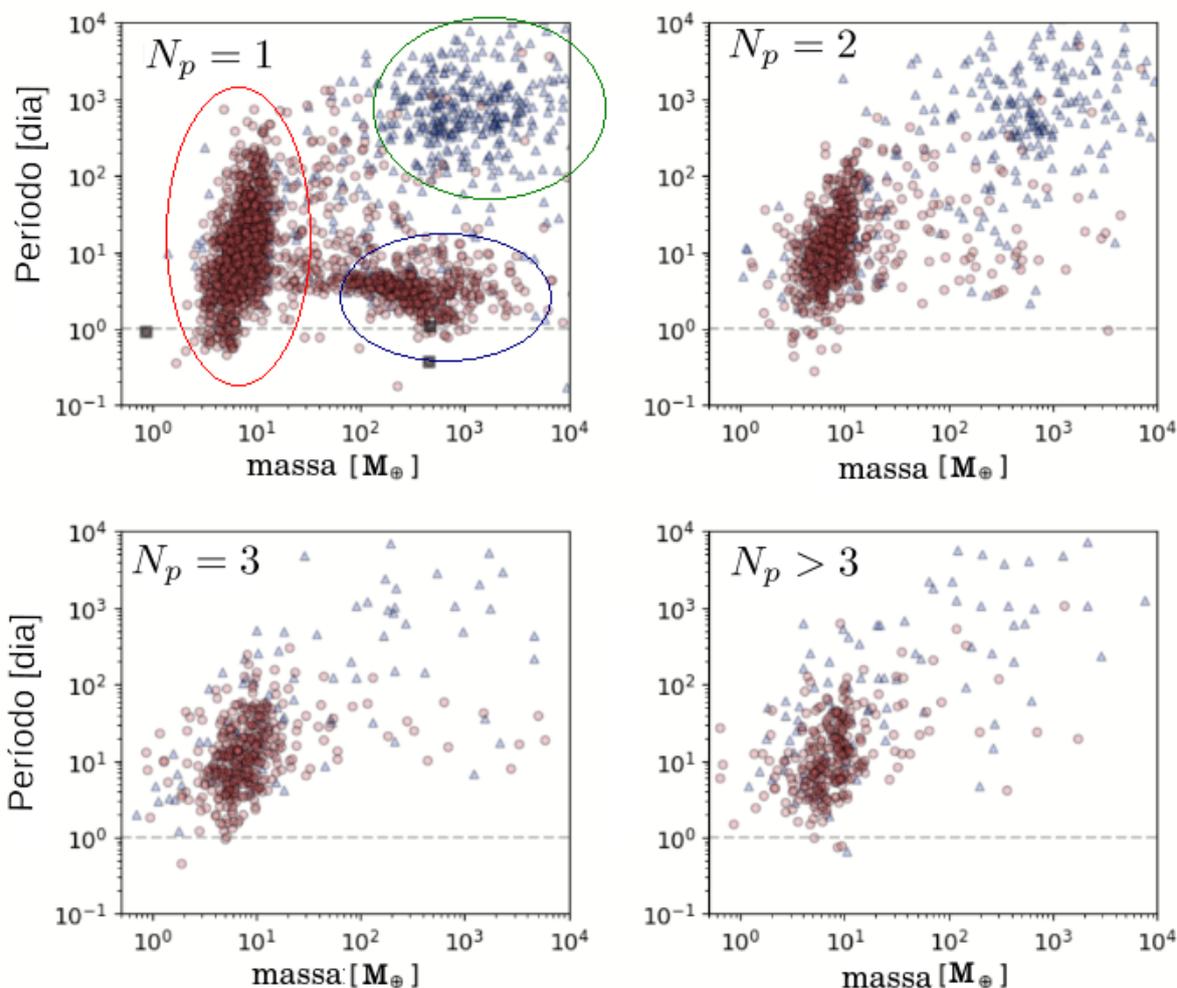


Figura 1.3: Distribuição de exoplanetas confirmados, segundo retirado do catálogo disponível no sítio `exoplanet.eu`, e plotados em um diagrama  $(m, P)$ . Os sistemas estão separados segundo o número  $N_p$  de planetas que os compõem. Corpos detectados pelo método de velocidade radial estão indicados com um triângulo azul; aqueles detectados por trânsito ou TTV são indicados com círculo vermelho. A linha pontilhada destaca o período equivalente a 1 dia.

aparentes, três grupos de populações planetárias, que aparecem nos demais painéis de forma menos acentuada. No quadro superior esquerdo, destacamos cada um desses grupos com as elipses coloridas. Abaixo, definimos cada uma dessas populações, em termos da relação massa-período: nominalmente, temos o grupo dos jupiteres-quentes, marcados com a linha azul; os chamados jupiteres-frios, destacados em linha verde; e finalmente, os corpos planetários que compõe os sistemas compactos, destacados em vermelho.

**Jupiteres-quentes (*hot Jupiters*):** mencionamos, anteriormente, como o primeiro exoplaneta detectado na órbita de uma estrela similar ao Sol foi 51 Peg b (Mayor e Queloz, 1995). Trata-se de um planeta com massa  $\sim 0.47 M_{\text{Jup}}$  mas, diferentemente do gigante gasoso do Sistema Solar, cujo período é de cerca de 12 anos, 51 Peg b possui um período

orbital bastante curto, de apenas 4.2 dias. Seu semi-eixo maior está catalogado com a medida de 0.052 unidades astronômicas (**UA**), conforme encontrado em Marcy et al. (1997). O planeta 51 Peg b constitui o que se conhece como “jupiter-quente” na literatura: um planeta cuja massa é de ordem de grandeza comparável a  $M_{\text{Jup}}$ , e semi-eixo  $a \lesssim 0.1$  UA (ou, de outro modo, períodos orbitais inferiores a 10 dias), sendo portanto um corpo gigante de altíssima temperatura, devido à sua proximidade com a estrela. Nos diagramas da Figura 1.3, eles estão destacados pela elipse em azul no primeiro quadro.

Atualmente, sabe-se que algumas centenas de planetas descobertos satisfazem essas características. No entanto, são objetos relativamente raros, representando apenas  $\sim 1\%$  dos sistemas compostos por estrelas de sequência principal (Dawson e Johnson, 2018). Ainda assim, os jupiteres-quentes possuem um papel de destaque no estudo das estruturas internas e composição atmosférica de exoplanetas do tipo jovianos. A descoberta dessa classe de objetos abriu caminho para a ciência planetária moderna, inspirando trabalhos teóricos acerca dos processos físicos de formação e evolução dos sistemas exoplanetários.

**Jupiteres-frios (*cold Jupiters*):** dentro da amostra de massas comensuráveis a Júpiter, mas de períodos orbitais mais longos, logo acima do grupo de jupiteres-quentes, observa-se um novo acúmulo. Ali, seus componentes formam uma população conhecida como jupiteres-frios (originalmente na literatura, incluem também a classe dos denominados *warm Jupiters*). No primeiro quadro da Figura 1.3, eles estão indicados pelo contorno verde.

Devido ao seu maior distanciamento em relação à estrela central, são objetos que se assemelham aos corpos gasosos do Sistema Solar, em termos da temperatura e da composição do núcleo e da superfície. Nos painéis da Figura 1.3, nota-se que muitos membros dessa classe encontram-se em sistemas multiplanetários, tendo sido descobertos através de medidas de velocidade radial. Alguns dos sistemas exoplanetários que foram objetos de estudo em trabalhos de mecânica celeste abrigam planetas que pertencem a este grupo. Destacamos, por exemplo, os objetos de pesquisa desta tese: o par externo do sistema HD 181433, planetas “c” e “d” (Horner et al., 2019); e o par “c” e “b” do sistema GJ 876 (Millholland et al., 2018).

**Planetas menores em sistemas compactos:** o terceiro e último acúmulo de pontos na Figura 1.3, marcado em contorno vermelho no quadro superior esquerdo, contém sistemas nos quais os planetas têm, em geral, massas  $\lesssim 20 M_{\oplus}$ , descrevendo órbitas re-

lativamente compactas, de períodos inferiores a 1 ano. Inclui os planetas telúricos, as super-Terras e corpos netunianos. A grande maioria desses corpos constituem sistemas multiplanetários, com arquiteturas de até 7 planetas orbitando uma única estrela: os exemplos mais famosos e recentes incluem os sistemas Trappist-1 (Gillon et al., 2017; Agol et al., 2021) e TOI-178 Leleu et al. (2021). Na literatura, é comum encontrar estudos referindo-se a tais objetos como *tightly packed planetary systems* (Dawson, 2018; Petit, 2021), em tradução livre, “sistemas planetários fortemente compactados”.

## 1.2 Ressonância de movimentos médios

Considere o problema de três corpos, com um corpo central mais massivo, e dois corpos orbitantes de massas  $m$  (interno) e  $m'$  (externo). Diremos que o sistema está configurado em uma ressonância de movimentos médios se as frequências de  $m$  e  $m'$ , isto é, seus movimentos médios  $n$  e  $n'$ , se encontrarem próximas a uma razão de números inteiros, tal que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p+q}{p}, \quad p, q \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Necessariamente, a quantidade  $(p+q)/q$  deve ser uma fração irredutível. Em termos de regime de movimento, a Equação (1.1) implica que a massa  $m$  executa  $p+q$  rotações em torno do corpo central, ao passo que  $m'$  executa  $p$  rotações. No restante deste trabalho, usaremos a abreviação RMM para designar a ocorrência de ressonância de movimentos médios.

O conceito e as ferramentas analíticas para estudo das RMMs foram desenvolvidos há mais de dois séculos, e remontam a importantes nomes da matemática e da astronomia, tais como Pierre Simon-Laplace (1749-1827) e Henri Poincaré (1854-1912).

As características marcantes de uma RMM são notadas a partir do movimento periódico dos corpos, evidenciado pelas conjunções orbitais e perceptíveis ao se analisarem, por exemplo, determinadas quantidades angulares. Todo argumento ressonante  $\theta$  de uma RMM planar pode ser escrito como uma combinação linear de dois *ângulos críticos* independentes,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , dados em termos das respectivas longitudes médias ( $\lambda$ ) e argumentos de

pericentro ( $\varpi$ ) de cada corpo, nominalmente escritos como

$$\sigma_1 = (1 + r)\lambda_2 - r\lambda_1 - \varpi_1, \quad (1.2)$$

$$\sigma_2 = (1 + r)\lambda_2 - r\lambda_1 - \varpi_2, \quad (1.3)$$

onde  $r = p/q$  é a razão entre os valores inteiros que definem a ressonância (Michtchenko et al., 2008a,b). Os argumentos ressonantes principais do problema, escritos como combinação linear dos ângulos críticos, podem ser definidos de maneira generalizada como  $\theta_{(k_1, k_2)} = k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2$ , tal que  $k_1 + k_2 = q$ <sup>4</sup>. A quantidade  $\theta$  é invariante mediante rotações do sistema de referência, uma propriedade conhecida como característica de d'Alembert (Murray e Dermott, 2000; Ferraz-Mello, 2007).

Em geral, RMMs de baixas ordens (isto é, valores de  $q$  próximos de 1) são mais dinamicamente significativas, ou mais fortes, e exibem maiores efeitos no movimento dos corpos envolvidos, com domínios maiores de seus efeitos no espaço de fase desses planetas. Não surpreendentemente, a grande maioria dos sistemas planetários que ocupam, segundo o que se conhece na literatura, posições de proximidade a ressonâncias, representam casos de RMMs de baixa ordem, particularmente com  $q = 1$ , como é o caso das razões 2:1 e 3:2 (Beaugé et al., 2012).

### 1.3 Caos e estabilidade

Os termos *caos* e *caoticidade* são verbetes relativamente novos quanto ao seu emprego dentro de um contexto científico. Em contrapartida, o conceito por trás desses termos já era conhecido no começo do século XX, por intermédio dos trabalhos do matemático e astrônomo francês Henri Poincaré. Em suas análises, Poincaré foi capaz de mostrar que mesmo sistemas aparentemente simples poderiam apresentar movimentos complexos e instáveis, tão intensos que duas trajetórias iniciadas em pontos muito próximos tenderiam a se afastar uma da outra em uma taxa exponencialmente rápida. Em termos práticos, esse tipo de instabilidade leva à imprevisibilidade sobre o comportamento do sistema para tempos longos, uma contraposição à ideia clássica do determinismo pressuposto

<sup>4</sup> Na RMM 3:1, por exemplo, que é de ordem  $q = 2$  ( $p = 1$ ),  $r = 1/2$ , e há três argumentos ressonantes principais:  $\theta_1^{(3:1)} = 2\sigma_1$ ,  $\theta_2^{(3:1)} = 2\sigma_2$ , e  $\theta_3^{(3:1)} = \sigma_1 + \sigma_2$  (Alves et al., 2016). Já na RMM 2:1,  $q = p = 1$ ,  $r = 1$ , e há apenas dois argumentos ressonantes,  $\theta_1^{(2:1)} = \sigma_1$  e  $\theta_2^{(2:1)} = \sigma_2$  (Sessin e Ferraz-Mello, 1984).

das equações de movimento newtonianas. Essa forte sensibilidade às condições iniciais constitui a própria essência do conceito de caos.

É importante, aqui, diferenciar a instabilidade caótica do caso ordinário de perda de informação devida à propagação de erros, introduzida pelo uso de computadores nas integrações numéricas das equações de movimento: neste último caso, o afastamento entre duas condições inicialmente próximas também ocorre, mas na forma de uma potência pequena do tempo, próxima de linear, enquanto que no primeiro, o distanciamento é, frisamos, exponencial. Entretanto, não é exponencial por tempo indefinido. Justamente por ocorrer um rápido afastamento das soluções, qualquer tipo de controle sobre elas é perdido, devido à imprevisibilidade intrínseca ao sistema caótico, e pouco a pouco, a correlação entre um estado atual e um estado anterior deixa de existir, de maneira tal que as trajetórias passarão a seguir tendências independentes. Essa perda rápida de informação é o que caracteriza o *caos determinístico*.

Também não se deve confundir a imprevisibilidade dos fenômenos caóticos com aquela típica dos fenômenos aleatórios. Nesta última, a imprevisibilidade não está associada à perda de informação ao longo do processo, mas advém da inexistência de correlação entre dois fenômenos consecutivos. Como em um jogo de dados, no qual o resultado da jogada atual independe do resultado obtido na jogada anterior. Ou seja, não há efeito causal entre um fenômeno e o acontecimento subsequente. Em um sistema caótico, existe causalidade, mas a sensibilidade ante as condições iniciais culmina na perda de correlação ao longo do caminho, por assim dizer, e daí surge a imprevisibilidade.

De maneira direta, o caos é uma característica esperada em sistemas com mais de um grau de liberdade. Por consequência é, há muito, um tema recorrente no estudo da Astronomia Dinâmica. Em seu trabalho acerca da não-integrabilidade do problema restrito de três corpos, um problema de mais de um grau de liberdade, Poincaré (1899) mencionou, pela primeira vez, a possibilidade de dinâmica caótica no movimento dos planetas. Muito mais tarde, o desenvolvimento da renomada teoria KAM levou ao entendimento de que o espaço de fase de sistemas dinâmicos conservativos, tais como o problema de  $N$ -corpos, é, em geral, um misto intrincado de trajetórias quasi-periódicas, contidas nos chamados *toros invariantes*, e órbitas caóticas. Ainda assim, estabelecer se o movimento de um planeta é caótico ou não permaneceu uma questão aberta, até que o uso de computadores e o cálculo numérico fossem aperfeiçoados e aplicados aos estudos, através de simulações. Atualmente,

por exemplo, sabe-se que a natureza do Sistema Solar é caótica (Laskar, 1989).

Hoje, caracterizar a arquitetura de determinado sistema exoplanetário pressupões, além de determinar os valores nominais de massas e elementos orbitais, estabelecer os limites de caos e estabilidade em torno da solução proposta, de maneira a evidenciar a robustez de tal solução.

Sendo assim, é simples perceber que o conceito de *estabilidade* é uma preocupação básica no estudo de sistemas de muitos corpos. O problema torna-se gradualmente mais complicado, e cada vez mais específico, quando nos distanciamos de configurações quase-integráveis e adentramos o universo dos cenários de problemas não-integráveis. De fato, diferentes definições para a estabilidade podem ser encontradas na literatura. Neste trabalho, acreditamos que ao menos duas delas mereçam ser mencionadas.

Na **estabilidade de Hill** (ou hierárquica), a ordem dos planetas (ou dos corpos orbitantes), em termos de sua distância ao corpo central, deve ser conservada. No entanto, o corpo para o qual a órbita é a mais extensa pode, eventualmente, escapar do sistema, e ainda assim a configuração macroscópica será dita estável (Barnes e Greenberg, 2006).

Por outro lado, a **estabilidade de Lagrange** é mais restritiva: o sistema deve manter seu estado coeso, com os corpos orbitantes atrelados ao corpo central; alterações nas ordens dos corpos são proibidas; e as variações temporais dos semi-eixos e das excentricidades devem ser limitadas (Barnes e Greenberg, 2006).

Finalmente, um dos principais problemas reside justamente na conexão entre estes dois conceitos amplos, o caos e a estabilidade. De que forma podemos abordar as propriedades dinâmicas de um sistema no intuito de melhor estabelecer correlações conclusivas entre o surgimento de cenários caóticos e a ocorrência de fenômenos notáveis (as chamadas “eventualidades”) ao longo da evolução do sistema?

## Teoria e ferramentas de análise

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, algumas ferramentas numéricas foram aplicadas, e em tal esforço, a teoria básica própria de cada uma delas foi estudada, dentro dos limites apropriados de abordagem e disponibilidade computacional. Neste capítulo, apresentamos a base teórica de tais ferramentas, ilustrando seu funcionamento por meio de alguns exemplos de aplicações simples.

### 2.1 Formalismo hamiltoniano para o problema de $(N_p + 1)$ -corpos

Seja um sistema formado por  $N_p + 1$  massas pontuais  $m_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_p$ , interagindo exclusivamente devido ao potencial gravitacional, descrito matematicamente pela Lei Universal da Gravitação de Newton (Newton, 1687). Por imposição, definimos  $m_0 \gg m_k$  ( $1 \leq k \leq N_p$ ) como o corpo central (estrela) dessa configuração de massas;  $N_p \geq 2$  designa a quantidade de corpos (planetas) que orbitam  $m_0$ . O centro de massa do sistema,  $\mathbf{B}$ , é um referencial inercial, e todas as massas podem ser localizados relativamente a  $\mathbf{B}$  usando vetores de posição baricêntricos  $\mathbf{r}_i$ . Na Figura 2.1, à esquerda, está esquematizado uma configuração de quatro corpos localizados em relação à origem  $\mathbf{B}$ .

As equações de movimento também podem ser obtidas a partir do formalismo hamiltoniano, com a aplicação de um conjunto canônico de variáveis de posição e momento ( $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_p$ ), sendo a função Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  do sistema definida como:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^{N_p} \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \mathcal{G} \sum_{0 \leq i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{G}$  designa a constante universal de gravitação, e  $\Delta_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}$  representam as distâncias relativas entre a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima massas. Note-se que  $\mathcal{H} =$

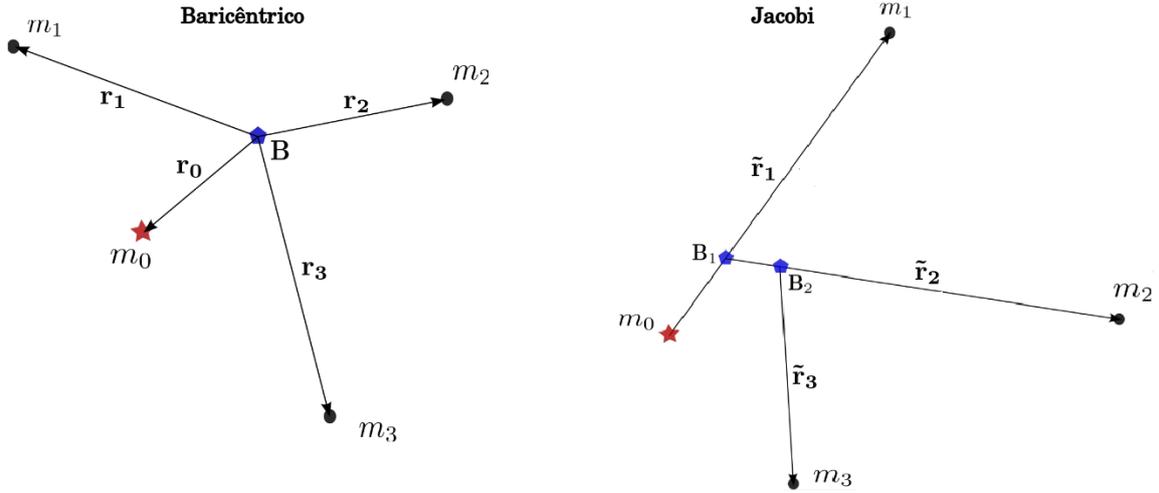


Figura 2.1: Sistemas de quatro corpos. À esquerda, os vetores de posição estão dados em coordenadas referenciadas ao baricentro do sistema, localizado no ponto  $\mathbf{B}$ . À direita, os vetores de posição estão dados em termos das coordenadas de Jacobi: neste caso, o ponto  $\mathbf{B}_1$  designa o baricentro das massas  $m_0$  e  $m_1$ ;  $\mathbf{B}_2$  é o baricentro de  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$ .

$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  define um sistema de  $3(N_p + 1)$  graus de liberdade. Uma vez que o conjunto  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  é canônico, então satisfaz as equações de Hamilton,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}_i} \mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}_i} \mathcal{H} = -\mathcal{G} \sum_{0 \leq i < j}^{N_p} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (2.3)$$

A partir de (2.2) e (2.3), obtêm-se  $6(N_p + 1)$  equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  e por isso, diz-se também que o  $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  define um sistema de ordem  $6(N_p + 1)$ . As Equações (2.2) e (2.3) são as equações de movimento do problema.

Aplicando transformações canônicas de coordenadas, é possível reduzir o número de graus de liberdade do sistema para  $3N_p$  (Ferraz-Mello, 2007). Dois conjuntos de variáveis canônicas de posição e momento se destacam como opções: as coordenadas de Poincaré e as coordenadas de Jacobi (Ferraz-Mello et al., 2005). No presente trabalho, adotamos essas últimas.

Seja então o conjunto de coordenadas canônicas de Jacobi,  $(\tilde{\mathbf{r}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i)$ . As variáveis de Jacobi consistem em posicionar o  $i$ -ésimo corpo sempre em relação ao baricentro dos  $i - 1$  corpos anteriores. O esquema à direita da Figura 2.1 ilustra a ideia por trás dessa afirmação, com cada nova massa  $m_i$  tendo sua posição  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  referenciada ao baricentro  $\mathbf{B}_{i-1}$ . Neste caso, o Hamiltoniano do sistema é separável em uma parte Kepleriana,  $\mathcal{H}_0$ , advinda

das interações mútuas entre cada par massivo, e uma parte perturbativa,  $\mathcal{H}_1$ , definidas segundo as equações a abaixo:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{j=1}^{N_p} \left( \frac{\tilde{\mathbf{p}}_j \cdot \tilde{\mathbf{p}}_j}{2m'_j} - \frac{\mu_j m'_j}{|\tilde{\mathbf{r}}_j|} \right), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{H}_1 = -\mathcal{G} \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{k=j+1}^{N_p} \frac{m_j m_k}{\Delta_{jk}} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^{N_p} m_j \left( \frac{m_0}{\Delta_{0j}} - \frac{\mu_{j-1}}{|\tilde{\mathbf{r}}_j|} \right), \quad (2.5)$$

conforme consta em Beaugé et al. (2007). Nas Equações 2.4 e 2.5,  $\mu_k = \mathcal{G} \sum_{j=0}^k m_j$  são os fatores de massa próprios da formulação canônica de Jacobi, com as massas reduzidas definidas como  $m'_k = m_k \mu_{k-1} / \mu_k$ . Na literatura, é comum que o Hamiltoniano apareça dado em termos das variáveis clássicas de ângulo-ação de Delaunay (Ferraz-Mello, 2007). No caso de aplicações das coordenadas de Jacobi, as variáveis de ação são ponderadas pelas massas reduzidas (Harrington, 1969). Abaixo, definimos os pares das variáveis de ângulo-ação tipicamente adotadas nos problemas de muitos corpos:

$$\mathcal{M}_k = \text{anomia média}; \quad \Lambda_k = m'_k \sqrt{\mu_k a_k}; \quad (2.6)$$

$$\omega_k = \text{argumento do periapse}; \quad \Gamma_k = \Lambda_k \sqrt{1 - e_k^2}; \quad (2.7)$$

$$\Omega_k = \text{longitude do nodo ascendente}; \quad \Psi_k = \Gamma_k \cos I_k. \quad (2.8)$$

O  $k$ -ésimo elemento de Delaunay é definido a partir da respectiva órbita Kepleriana do  $k$ -ésimo planeta em relação ao  $(k - 1)$ -ésimo baricentro,  $\mathbf{B}_{k-1}$ . Nas relações anteriores,  $a_k$ ,  $e_k$  e  $I_k$  representam o semi-eixo, a excentricidade e a inclinação do  $k$ -ésimo corpo, respectivamente. Obtidos a partir da órbita Kepleriana, são também denominados *elementos osculadores*. Além disso, alguns autores convencionaram chamar  $\Lambda_k$  o momento circular da trajetória, enquanto  $\Gamma_k$  define o momento angular da respectiva órbita.

A partir das variáveis de Delaunay, a parte Kepleriana  $\mathcal{H}_0$  pode ser reescrita como

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\mu_j^2 m'_j{}^3}{2\Lambda_j^2}. \quad (2.9)$$

No desenvolvimento do estudo aqui apresentado, aplicamos uma rotina computacional de integração de problemas de  $N$ -corpos. As quantidades da energia total  $E(= \mathcal{H})$ , e do momento angular total  $\mathbf{J}$ , são computadas e adotadas como constantes numéricas do problema. Sabemos que a expressão para  $\mathbf{J}$  deve ser invariante mediante uma transformação canônica, portanto:

$$\mathbf{J} = \sum_{k=0}^{N_p} \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{p}_k = \sum_{k=1}^{N_p} \tilde{\mathbf{r}}_k \wedge \tilde{\mathbf{p}}_k. \quad (2.10)$$

Particularmente, a componente normal com respeito ao plano de referência das órbitas é definida como

$$J_{\perp} = \sum_{k=1}^{N_p} \Psi_k = \sum_{k=1}^{N_p} \Lambda_k \sqrt{1 - e_k^2} \cos I_k = \sum_{k=1}^{N_p} m_k \sqrt{\mu_k a_k} \sqrt{1 - e_k^2} \cos I_k. \quad (2.11)$$

Esta equação é exata no caso em que elementos Kepleriano de Poincaré ou de Jacobi são aplicados, mas continua aproximadamente válida mesmo quando trabalha-se com variáveis astrocêntricas. Neste caso, ocorre um desvio do valor correto que vai com  $\mathcal{O}(m_k^2)$ . O momento angular  $J$  é responsável por vincular os semi-eixos, as excentricidades e as inclinações dos planetas de um dado sistema (Ferraz-Mello et al., 2005).

## 2.2 Integração das equações de movimento

Ao se propor o estudo da dinâmica de um sistema gravitacionalmente ligado, é imprescindível dispor de um integrador que permita obter a evolução temporal das órbitas dos corpos que compõem este sistema. Neste trabalho, aplicamos um código numérico para simulação de sistemas de  $N$ -corpos, denominado `Ncorp` (Beaugé e Cincotta, 2019; Alves Silva et al., 2021), o qual foi desenvolvido pelo grupo de Astronomia Dinâmica do Observatório Astronômico de Córdoba (Argentina). Uma das muitas facilidades proporcionadas por esse código é a possibilidade de trabalhar com diferentes integradores numéricos (por exemplo, Bulirsch-Stoer, Runge-Kutta, Radau 15), distintos sistemas de coordenadas (astrocêntrico, baricêntrico, Jacobi ou Poincaré), além de incluir efeitos dinâmicos dissipativos (interações tidais), bem como fenômenos dinâmicos não-Newtonianos (efeitos relativísticos). O código ainda permite obter a evolução das trajetórias no espaço dos elementos orbitais  $(a, e, i, \mathcal{M}, \omega, \Omega)$  ou das componentes retangulares (cartesianas) de posição e velocidade  $(x, y, z; v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z})$ .

Na rotina `Ncorp`, uma vez definidos os parâmetros de integração (que incluem o método integrador, as unidades básicas de massa-tempo-distância, o tempo total de computação  $T$  e o tempo de saída dos dados integrados,  $h^1$ , além dos parâmetros físicos do problema, como as massas dos corpos e as demais condições iniciais), as equações de movimento newtonianas são resolvidas computacionalmente. É comum dizer-se, então, que as equações

<sup>1</sup> O tempo de saída deve ser entendido como o tempo de amostragem, tal que o número  $n$  de pontos integrados ao final de um processo de integração em um intervalo  $T$  seja dado por  $n = T/h$ .

de movimento *exatas* do problema são integradas<sup>2</sup>. A integração é feita em coordenadas retangulares,  $(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  e, mais tarde, transformações clássicas de rotação são aplicadas a fim de se recuperar os respectivos valores evoluídos dos elementos orbitais, a saber,  $(a, e, I, \mathcal{M}, \omega, \Omega)$ .

Para exemplificar, a Figura 2.2 ilustra um resultado de uma aplicação da ferramenta `Ncorp` para o problema de quatro corpos restrito. Nos três painéis, exibimos os resultados de uma integração do movimento do asteroide 522 Helga. 522 Helga é um objeto do cinturão principal de asteroides, localizado na parte interna do Sistema Solar ( $a < a_{\text{Jup}}$ ), mais precisamente sendo um membro do grupo asteroidal Cybele (Lagerkvist et al., 2001). Foi descoberto em 1904 pelo astrônomo alemão Max Wolf (1863-1932). Este asteroide ganhou bastante notoriedade na comunidade de Mecânica Celeste por apresentar, em simulações numéricas, uma órbita caótica de longa estabilidade, algo que convencionou-se chamar *caos estável*, às vezes também chamado *caos confinado* (Milani e Nobili, 1992, 1993).

A integração do sistema foi feita para um tempo total  $T = 10^7$  anos, aplicando um integrador Bulirsch-Stoer de precisão  $10^{-12}$ , e um sistema de referência astrocêntrico (origem no Sol). Considerou-se os efeitos perturbativos devidos aos gigantes gasosos principais, Júpiter e Saturno. A tabela 2.1 apresenta os valores dos elementos osculadores heliocêntricos de cada um dos corpos do problema, conforme obtidos das efemérides gerada pelo sistema *Horizons*, encontradas no sítio <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons>. Tais valores foram utilizados como o *input* de condições iniciais no código `Ncorp`.

Nos quadros (a) e (b) da Figura 2.2, mostramos as evoluções do semi-eixo e da excentricidade do asteroide, respectivamente. O comportamento de longa estabilidade é evidente. Ambas as quantidades orbitais apresentam um intervalo de variação de limites bem definidos, sendo  $3.61 \text{ UA} < a < 3.66 \text{ UA}$  e  $e \lesssim 0.1$  ao longo de  $t \leq T$ . No painel (c), apresentamos as evoluções das quantidades angulares resultantes de combinações ressonantes (grandezas sem subíndice referem-se à Helga): ali, estão expostos os argumentos característicos da ressonância (interna) de movimentos médios 7:12 entre as órbitas do asteroide

<sup>2</sup> Nesse contexto, a palavra *exata* possui uma conotação intrínseca: significa dizer que, na forma explícita da equação diferencial de 2ª ordem  $F_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$  de cada corpo, as perturbações mútuas são consideradas em sua forma completa, isto é, sem aproximações. É diferente do que ocorre quando reduz-se os graus de liberdade do problema através de uma média (*averaging*) sobre as componentes periódicas rápidas do sistema (Roig e Ferraz-Mello, 1999).

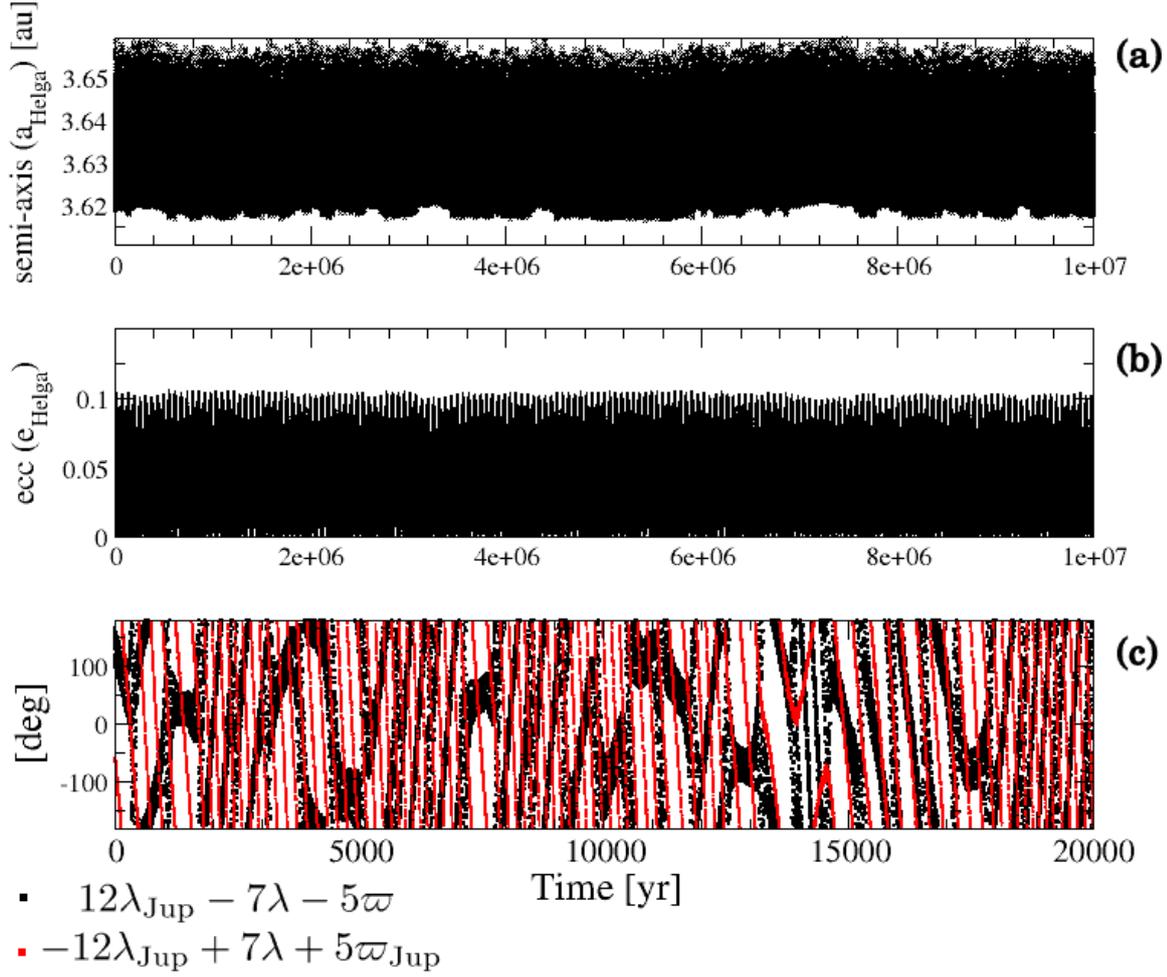


Figura 2.2: Integração numérica das equações de movimento do problema de 4-corpos restrito, para o caso de um sistema formado por Sol-522 Helga-Júpiter-Saturno (a) Evolução do semi-eixo de 522 Helga em  $T = 10^7$  anos. (b) Evolução da excentricidade de 522 Helga em  $T = 10^7$  anos. (c) Evoluções dos argumentos ressonantes  $\theta_1^{(7:12)}$  e  $\theta_2^{(7:12)}$  da RMM interna de razão 7:12 entre 522 Helga e Júpiter, mostradas para  $2 \times 10^4$  anos.

Tabela 2.1 - Valores iniciais para os parâmetros orbitais de um sistema de quatro corpos Sol-Helga-Júpiter-Saturno, recolhidos de um gerador de efemérides disponível em <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons>.

Parâmetros	Unidade	522 Helga	Júpiter	Saturno
$m$	[ $M_{\text{Jup}}$ ]	-	1.0000	0.2990
$a$	[UA]	3.62466	5.202909	9.53000
$e$		0.08635	0.0486517	0.0513738
$I$	[grau]	4.42001	1.30371	2.48694
$\mathcal{M}$	[grau]	38.414	292.275	214.388
$\omega$	[grau]	248.249	273.620	336.569
$\Omega$	[grau]	116.571	100.519	113.605

e Júpiter, nominalmente  $\theta_1^{(7:12)} = 12\lambda_{\text{Jup}} - 7\lambda - 5\varpi$  (preto) e  $\theta_2^{(7:12)} = 12\lambda_{\text{Jup}} + 7\lambda + 5\varpi_{\text{Jup}}$  (vermelho). A evolução dos ângulos é mostrada para um intervalo de tempo menor ( $2 \times 10^4$  anos), porém suficiente para identificar o comportamento caótico da trajetória, conforme reportado por Milani e Nobili (1992): note que ambos os argumentos, em especial  $\theta_1^{(7:12)}$ , alternam regimes de circulação e oscilações mais curtas, indicando um movimento errático ao longo do tempo.

## 2.3 Indicadores de caos

A principal característica associada ao comportamento caótico de um sistema dinâmico é a sensibilidade de sua evolução temporal relativamente à pequenas mudanças nas condições iniciais e, conseqüentemente, a perda de informação ao longo da evolução do sistema (é possível falar também em uma perda de correlação entre um estado de fase e o estado de fase imediatamente posterior).

Sumariamente, trajetórias caóticas vizinhas tendem a divergir exponencialmente ao longo do tempo, ao passo que trajetórias regulares se distanciam em uma taxa linear. A taxa de divergência pode ser quantificada, medindo-se justamente o afastamento entre as duas trajetórias que iniciam o movimento em posições “infinitesimalmente” próximas. A literatura apresenta algumas ferramentas numéricas capazes de parametrizar esse deslocamento entre as soluções e, assim, classificar o sistema como caótico ou regular. É de praxe denominar tais ferramentas como indicadores de caos.

### 2.3.1 Método de análise espectral

O método de análise espectral é baseado nas propriedades conhecidas dos espectros de potência (Michtchenko e Ferraz-Mello, 1995, 2001), e se mostra uma ferramenta de grande utilidade para investigação de sinais temporais, auxiliando, entre outras funções, na detecção de caoticidade de um sistema, e na determinação das frequências fundamentais de movimento. As técnicas de transformada de Fourier, aplicadas aos *outputs* de integrações numéricas, permitem a distinção entre regimes de movimento caóticos e regulares.

- *Órbitas regulares* - As trajetórias regulares são periódicas, então qualquer elemento

$f(t)$  da trajetória é uma função temporal da forma:

$$f(t) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} e^{2\pi i \mathbf{k} \nu t} \quad (2.12)$$

onde  $\nu$  é um vetor de frequência cujas componentes são as frequências independentes intrínsecas ao movimento,  $\mathbf{k}$  é um vetor de inteiros e  $A_{\mathbf{k}}$  são componentes escalares que definem amplitudes para a função  $f(t)$ . Através de uma transformada de Fourier, é possível obter a composição espectral para  $f(t)$ , quando tais frequências são constantes no tempo. Ao se trabalhar dados discretizados, faz-se uso de rotinas que geram a transformada discreta de Fourier (DFT, Press et al. (1993)) desses dados.

Um espectro típico para um movimento regular é caracterizado por uma quantidade contabilizável de frequências bem definidas, geralmente uma quantidade pequena. Tal quantidade consiste em um número de linhas (linhas espectrais), associadas às frequências independentes que caracterizam os graus de liberdade do sistema dinâmico, e também às possíveis componentes harmônicas e combinações lineares dessas frequências independentes. Um detalhe interessante é que a largura a meia altura (FWHM) dessas linhas é da ordem de  $\Delta\nu = 1/T$ , onde  $T$  vem a ser o tempo total de integração das equações de evolução das órbitas. Nesse sentido,  $T$  define a resolução da transformada de Fourier: para um valor de  $T$  suficientemente grande, cada pico se aproxima do perfil de uma função  $\delta$  de Dirac.

- *Órbitas caóticas* - No caso de movimento caótico, as frequências independentes do sistema dinâmico variam ao longo do tempo, resultando em trajetórias irregulares que não apresentam periodicidade. Assim, a transformada de Fourier dos elementos orbitais de uma órbita caótica tem o espectro de potência que não é discreto, apresentando componentes de banda larga (*broad band*) e em geral, um perfil característico de “ruído branco” (*white noise*).

**Número espectral:** o número espectral característico de dado espectro de potência é definido como a quantidade  $L$  de linhas espectrais presentes em seu perfil, acima de determinado limite, chamado nível de ruído, e que em geral tende a ser definido de acordo com o problema que está sendo trabalhado, e para cada sinal analisado<sup>3</sup>. Na literatura, esse

<sup>3</sup> Em geral, considera-se em tal cálculo os picos cuja amplitude seja maior que  $\sim 5\%$  da amplitude do maior pico do espectro (Ferraz-Mello et al., 2005).

número é aplicado na qualificação do movimento planetário da seguinte forma: pequenos valores de  $L$  em um espectro de potências de um elemento orbital correspondem a um movimento regular, enquanto altos valores de  $L$  indicam um regime caótico.

### 2.3.2 LCE - *Lyapunov Characteristic Exponent*

Os expoentes característicos de Lyapunov (LCE) de uma trajetória são medidas assintóticas que quantificam a taxa de divergência de órbitas muito próximas, diante de pequenas perturbações, ao longo do tempo e dentro do espaço de fase considerado (Lichtenberg e Lieberman, 1992; Contopoulos, 2002; Skokos, 2010). O conceito foi introduzido por Lyapunov quando ele estudava a estabilidade de soluções não-estacionárias de equações diferenciais ordinárias (Lyapunov, 1992). Desde então, tem sido largamente aplicado no estudo de sistemas dinâmicos.

O desvio  $\xi$  de órbitas próximas, que inicialmente (em um tempo  $t_0$ ) estão afastadas por um desvio  $\xi_0$ , é medido pelo LCE  $\chi$ , definido pelo seguinte limite (Contopoulos, 2002)

$$\chi = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\xi/\xi_0|}{t}, \quad (2.13)$$

aonde o supremo é tomado considerando todos os desvios infinitesimais iniciais. Na sequência deste trabalho, usarei  $\chi$  para indicar a expressão que está sendo calculada dentro do limite dado na Equação (2.13), e não propriamente o limite quando  $t \rightarrow \infty$ .

Se uma órbita é regular, o desvio  $\xi$  entre trajetórias próximas cresce linearmente, tal que vale a relação  $\xi \propto \xi_0 t$ , e logo  $\ln(\xi/\xi_0) \sim \ln t$ . O limite

$$\chi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} \quad (2.14)$$

é zero.

No caso de um regime caótico, a distância entre duas trajetórias inicialmente muito próximas cresce exponencialmente, tal que  $\xi = \xi_0 e^{qt}$ , onde a constante  $q > 0$  é um autovalor real associado ao autovetor que “aponta” na direção e sentido de crescimento da divergência. O limite (2.13) é tal que  $\chi = q$  (constante).

Na literatura, a quantidade  $\chi^{-1}$  é denominada *tempo de Lyapunov* ( $T_L$ ), e designa o intervalo (medido a partir do tempo inicial  $t_0$ ) necessário para que um dado sistema dinâmico manifeste comportamento caótico.

Na rotina computacional `Ncorp`, o expoente de Lyapunov de determinada trajetória é computado por meio das soluções de equações variacionais, que são calculadas concomitantemente às equações de movimento da respectiva órbita.

O quadro superior mostrado na Figura 2.3 ilustra a explicação anterior, considerando condições iniciais para duas órbitas distintas do sistema exoplanetário HD 60532<sup>4</sup> (Desort et al., 2008) integradas em  $T = 10^6$  anos, uma regular (não-caótica), desenhada em cor preta, e outra irregular (caótica), mostrada em vermelho. O comportamento do LCE está plotado em um gráfico log-log em função de  $t$ , o tempo de integração da solução. Note o comportamento da curva preta, no qual o  $\log_{10} \chi$  segue em queda (linear) a valores cada vez mais negativos ( $\chi$  se aproximando de zero), até ocorrer o fim da integração em  $t = T$ . A curva vermelha, por outro lado, “satura” antes de  $T$ , apresentando um limite assintótico, neste caso tal que  $\log_{10} \chi \approx -2.8$ , e  $\chi \approx 1.6 \times 10^{-3} \text{ ano}^{-1}$  ou  $T_L \approx 631$  anos, significando aqui que o sistema é (fortemente) caótico.

Um detalhe de suma importância deve ser salientado: de maneira geral, em regiões de intenso caos, o valor calculado para  $\chi$  tende a não depender da condição inicial. No entanto, quando há caos mais lento, o fato de o LCE ser propriamente obtido a partir de um limite no qual  $t \rightarrow \infty$  implica que, se o intervalo de cálculo não for suficientemente longo, os resultados obtidos poderão ser diferentes da realidade.

Uma descrição apropriada da teoria matemática acerca dos expoentes característicos de Lyapunov pode ser devidamente verificada no trabalho de Benettin et al. (1980).

### 2.3.3 MEGNO - *Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits*

A detecção de caos diretamente da computação do LCE apresenta duas dificuldades maiores: o custo computacional necessário para se chegar, dentro do intervalo  $t - t_0$ , a uma configuração característica de caos no sistema; e a falta de informação capaz de distinguir entre órbitas regulares (estáveis/instáveis) e quasi-periódicas. Nesse aspecto, Cincotta e Simó (2000) introduziram, em seu trabalho, uma nova ferramenta numérica capaz de detectar a ocorrência de regimes caóticos, denominada por eles de coeficiente MEGNO,

<sup>4</sup> O sistema HD 60532 consiste de dois planetas gigantes, HD 60532b e HD 60532c, de massas pouco superiores a  $M_{\text{Jup}}$ , que orbitam uma estrela de tipo espectral F, de massa  $m_0 = 1.44 M_{\odot}$ . Muito possivelmente, o par planetário encontra-se em uma configuração de ressonância dos movimentos médios, na razão 3:1 (Laskar e Correia, 2009; Alves et al., 2016).

cuja sigla significa, em tradução livre, “fator de crescimento exponencial médio de órbitas próximas”.

Se reformulamos a Equação (2.13) em sua forma integral, podemos escrever

$$\chi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\|\dot{\mathbf{d}}(\tau)\|}{\|\mathbf{d}(\tau)\|} d\tau = \left\langle \frac{\dot{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}} \right\rangle. \quad (2.15)$$

O fator MEGNO  $Y$  é introduzido, então, como

$$Y(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\|\dot{\mathbf{d}}(\tau)\|}{\|\mathbf{d}(\tau)\|} \tau d\tau. \quad (2.16)$$

Similarmente, seu valor médio  $\langle Y \rangle$ , calculado no mesmo intervalo, é escrito da seguinte forma:

$$\langle Y \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Ambos os coeficientes  $Y$  e  $\langle Y \rangle$  são quantidades adimensionais.

Pode-se mostrar, de forma direta, que ao assumirmos que o vetor distância  $\mathbf{d}$  cresce de acordo com uma lei de potência no tempo ( $\mathbf{d} \sim \alpha t^n$ ), então o valor médio do MEGNO é constante, e  $\langle Y \rangle = 2n$ . No caso de um movimento Kepleriano não-perturbado (sistema regular),  $\mathbf{d}$  cresce linearmente, e  $\langle Y \rangle = 2$ . Se  $\mathbf{d}$  varia exponencialmente ( $\mathbf{d} \sim \mathbf{e}^{\alpha t}$ ), observaremos o crescimento médio se comportando tal que  $\langle Y \rangle = \alpha t$ . No painel inferior da Figura 2.3, reproduzimos o comportamento do fator  $\langle Y \rangle$ , calculado para os mesmos casos de órbitas regular (preto) e caótica (vermelho) do sistema HD 60532 mostrados no painel de cima para o caso do cálculo do LCE. Da mesma forma que ocorre no primeiro painel, a curva vermelha mostra que o caos se manifesta no sistema a partir de  $t \approx 6000$  anos.

### 2.3.4 A correspondência entre o MEGNO e o LCE

De uma forma generalizada, a evolução assintótica de  $\langle Y \rangle$  pode ser escrita segundo a relação  $\langle Y \rangle = \alpha t + \beta$ . Assim, é possível separar o comportamento de uma dada trajetória conforme: (i) trajetórias regulares (estáveis e/ou quasi-periódicas) implicarão em  $\alpha_\varphi = 0$  e  $\beta_\varphi \approx 2$ ; (ii) trajetórias caóticas, para as quais ocorrerá uma divergência linear de  $\langle Y \rangle$  com  $t$ , tal que o coeficiente angular é dado por  $\alpha_\varphi = \chi/2$ . De forma mais simples e direta, a correspondência entre  $\langle Y \rangle$  e  $\chi$  pode ser escrita explicitamente como  $\langle Y \rangle \approx \frac{1}{2}\chi t$ .

A Figura 2.4 apresenta a correlação entre medidas de  $\chi$  e  $\langle Y \rangle$ , obtidas para um mesmo conjunto de  $10^4$  condições iniciais do plano de fase  $(a_2, e_2)$  do sistema exoplanetário HD

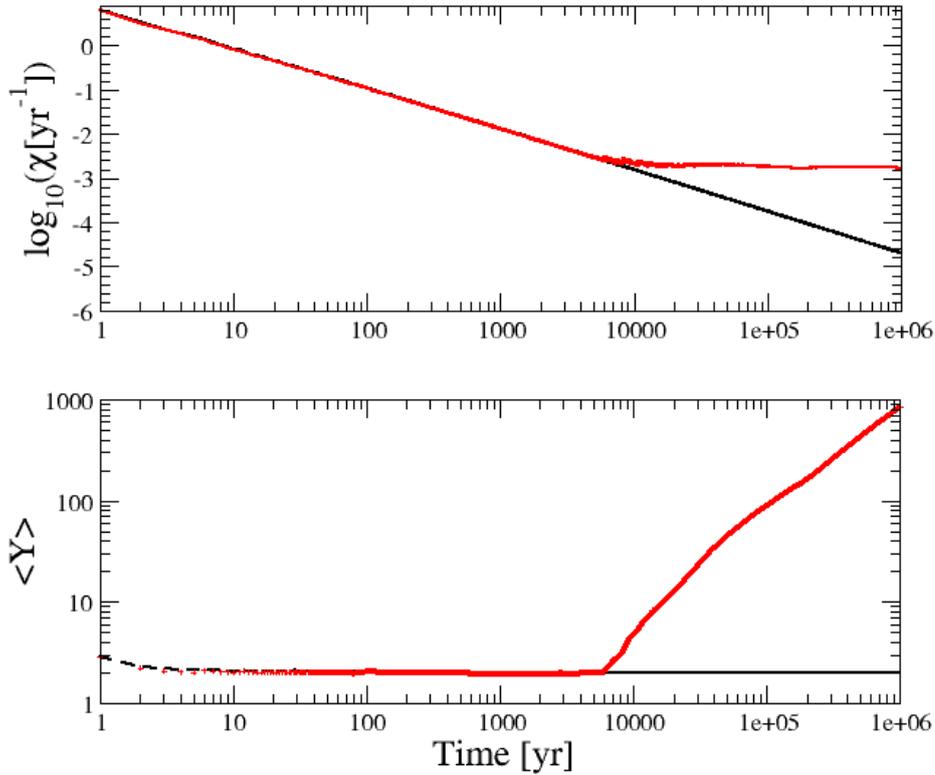


Figura 2.3: Exemplo do comportamento temporal no caso em que se computa o expoente de Lyapunov (LCE, quadro superior) e o fator MEGNO ( $\langle Y \rangle$ , quadro inferior) para diferentes tipos de trajetórias. No eixo  $x$ , mostramos em escala logarítmica o tempo de integração da solução; no eixo  $y$  do painel de cima, vemos o logaritmo de  $\chi$  calculado para a trajetória. No painel de baixo, o eixo das ordenadas mostra o fator  $\langle Y \rangle$  também em escala log. A curva preta representa uma órbita regular do sistema HD 60532. A curva vermelha, por sua vez, representa uma órbita caótica para o mesmo sistema.

181433<sup>5</sup> (Horner et al., 2019; Cincotta et al., 2021; Alves Silva et al., 2021). Tal conjunto foi simulado em três intervalos distintos de tempos de integração,  $T_1 = 5 \times 10^4$  anos (pontos verdes),  $T_2 = 10^6$  anos (pontos vermelhos) e  $T_3 = 5 \times 10^6$  anos (pontos azuis). Em cada eixo, graficamos os valores do inverso<sup>6</sup> do LCE, conforme obtidos a partir da computação das soluções numéricas feitas com o código `Ncorp`. No eixo das ordenadas, cada ponto é dado por  $y = \chi^{-1}$ , sendo  $\chi$  o valor computado para o LCE, dentro do respectivo intervalo  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . No eixo das abcissas, usamos os valores calculados a partir da computação do MEGNO, isto é,  $\chi_{\text{Meg}}^{-1} = [2\langle Y \rangle / T_i]^{-1}$ .

<sup>5</sup> Na presente tese, o sistema HD 181433 será devidamente estudado em um capítulo posterior.

<sup>6</sup> O ponto de atenção, aqui, é entender que o inverso do coeficiente de Lyapunov não representa, necessariamente, o tempo de Lyapunov,  $T_L$ . A relação  $T_L \equiv \chi^{-1}$  se, e somente se,  $\chi$  representa o limite assintótico dado pela Equação (2.13).

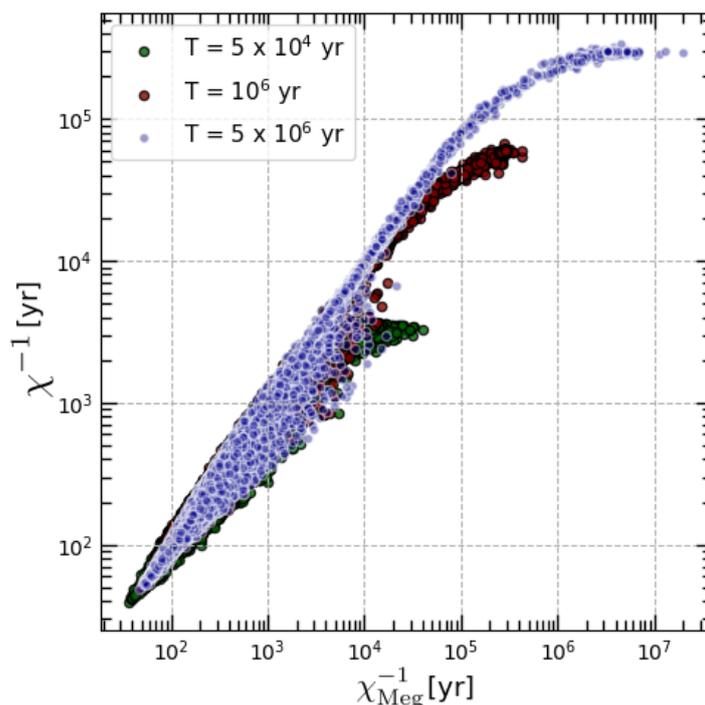


Figura 2.4: Diagrama de correlação para o inverso do expoente de Lyapunov, obtidos diretamente do cálculo do LCE,  $\chi^{-1}$ , e indiretamente, a partir do MEGNO,  $\chi_{\text{Meg}}^{-1} = T_i/[2\langle Y \rangle]$ , onde  $T_i$  designa o  $i$ -ésimo intervalo de integração. Cada conjunto de dados representa  $10^4$  condições iniciais retiradas do espaço de fase  $(a_2, e_2)$  do sistema HD 181433, integradas em três intervalos de tempo diferentes, conforme indicado na legenda.

Nota-se a equivalência visual entre ambos os resultados, o que, a princípio, corrobora a relação algébrica entre os indicadores.

Chama a atenção o aspecto de “saturação” presente nas três distribuições. As curvas saturam para os valores de  $\chi^{-1}$ , o que não é verificado para  $\chi_{\text{Meg}}^{-1}$ . Perceba que, no caso de  $\chi^{-1}$ , as curvas formam um platô em valores que são aproximadamente uma ordem de grandeza menores que o tempo de integração  $T$ . Olhando para o primeiro conjunto de integrações ( $T = 5 \times 10^4$  anos, pontos verdes),  $\chi^{-1} \lesssim 3000$  anos; por outro lado,  $\chi_{\text{Meg}}^{-1} \lesssim 3 \times 10^4$  anos, um limite dez vezes maior. De forma análoga, para os pontos vermelhos ( $T = 10^6$  anos),  $\chi^{-1} \lesssim 6 \times 10^4$  anos, e  $\chi_{\text{Meg}}^{-1} \lesssim 5 \times 10^5$  anos. E para o intervalo mais longo, ( $T = 5 \times 10^6$  anos),  $\chi^{-1} \lesssim 3 \times 10^5$  anos, enquanto  $\chi_{\text{Meg}}^{-1} \lesssim 2 \times 10^7$  anos.

Para as condições iniciais em que  $\chi^{-1}$  é comparável ao intervalo de integração (e neste caso, isso implica trajetórias de caos relativamente lento), as estimativas feitas a partir das medidas de MEGNO mostram  $\chi_{\text{Meg}}^{-1} > \chi^{-1}$ . Os cálculos obtidos de  $\chi^{-1}$  tendem a ser limitados a valores em torno de uma ordem de grandeza inferiores ao intervalo de integração

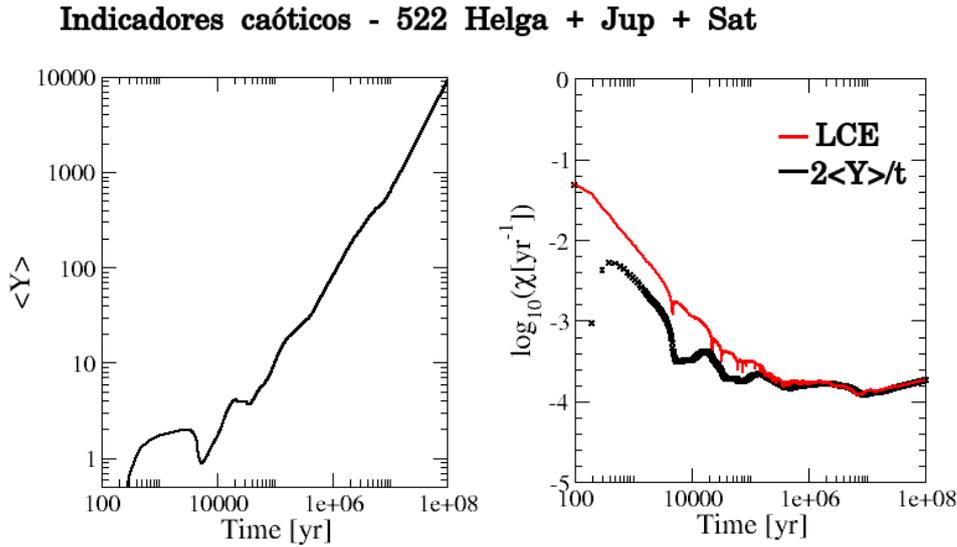


Figura 2.5: Valores computados para o MEGNO e o LCE, conforme obtidos a partir de simulação numérica feita com o código `Ncorp` em  $T = 10^8$  anos para o problema de quatro corpos restrito do asteroide Helga, considerando os gigantes Júpiter e Saturno como os perturbadores do movimento. O painel esquerdo apresenta o crescimento linear de  $\langle Y \rangle$ , típico de trajetórias caóticas (Cincotta e Simó, 2000). À direita, vemos o comportamento do expoente de Lyapunov, derivado das equações variacionais (vermelho) e indiretamente, a partir do MEGNO (preto).

aplicado, formando a saturação vista nos três conjuntos de dados.

Isso pode ser explicado analisando as equações que definem o LCE e o MEGNO. Na Equação (2.13), repare que toda trajetória regular será caracterizada por um comportamento assintótico de  $\chi$  que vai com  $(\ln t)/t$ . Já no caso do MEGNO, por usar uma forma diferencial, espera-se que o limite assintótico seja definido por um “decaimento” de  $1/t$ . Ambos os limites vão a zero em  $t \rightarrow \infty$ , mas o MEGNO o faz mais rapidamente, uma vez que o numerador da fração é dado por uma constante, enquanto que no outro caso, é uma função crescente de  $t$ . Isso poderia explicar o porque de o MEGNO atingir valores de tempos  $\chi_{\text{Meg}}^{-1}$  comparáveis com os tempos de integração, enquanto o LCE é limitado a valores em torno de dez vezes menores.

Como último exemplo de aplicação dos indicadores MEGNO e LCE à análise do caos em sistemas dinâmicos, apresentamos na Figura 2.5 dois painéis que exibem o comportamento de  $\langle Y(t) \rangle$  (esquerda) e de  $\chi(t)$  (direita), considerando uma integração em  $T = 10^8$  anos do problema de quatro corpos restrito Sol+Helga+Júpiter+Saturno. No painel esquerdo, nota-se o crescimento vertiginoso do fator MEGNO, aproximadamente linear, denotando de fato a alta caoticidade do sistema. O segundo painel mostra o comportamento do

expoente de Lyapunov, conforme computado diretamente (vermelho) e indiretamente a partir da medida de  $\langle Y \rangle$ , evidenciando novamente a correspondência entre o MEGNO e LCE.

É fácil notar que, para tempos maiores que  $10^7$  anos, as curvas à direita apresentam um comportamento assintótico (diz-se também uma “horizontalização”), convergindo para valores de  $\chi \approx 1.58 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$ , ou  $T_L \approx 6300$  anos, valor bastante próximo de 6900 anos, que foi reportado no trabalho de Milani e Nobili (1992).

No entanto, percebe-se que se houvésemos aplicado um intervalo menor de integração, por exemplo,  $10^5$  anos, os resultados não seriam equivalentes. Por um lado, a curva preta ainda se aproximaria do valor de  $\chi \approx 1.58 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$  ( $\log_{10} \chi \approx -3.8$ ) obtido com a simulação de  $10^8$  anos. Por outro, vemos que a curva vermelha apresenta um logaritmo de  $-3.6$ , ou  $\chi \approx 2.51 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$ , isto é,  $T_L \approx 3980$  anos.

## 2.4 Indicadores de estrutura

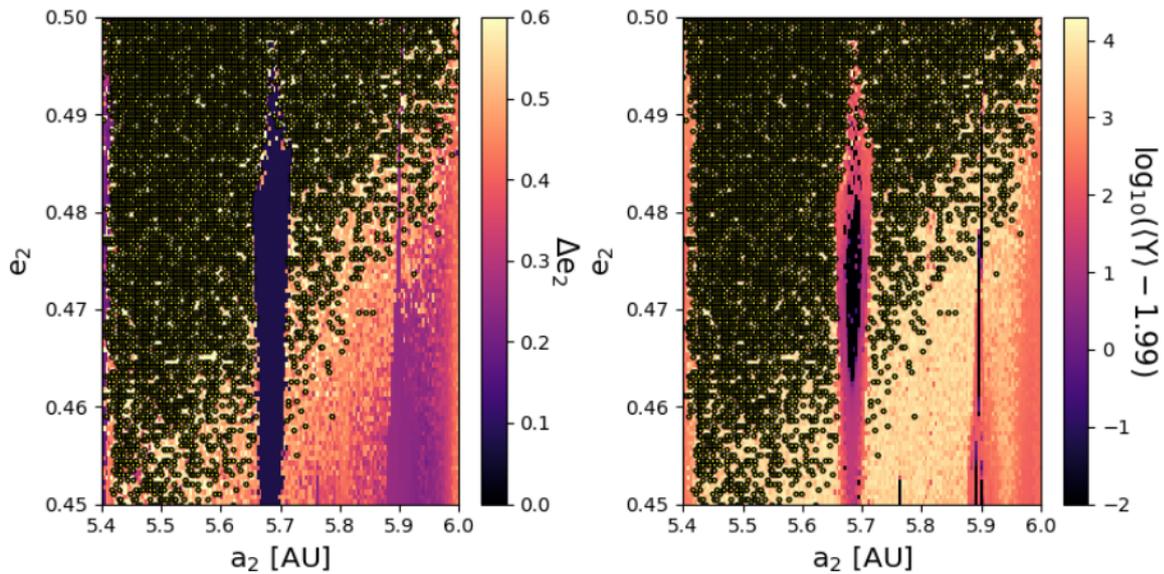
Além dos indicadores de caos, o espaço de fase de um sistema de muitos corpos pode ser caracterizado por meio de uma análise das estruturas dinâmicas que surgem a partir de regimes de movimento distintos. Tais estruturas tendem a aparecer quando se analisam as variações das ações orbitais típicas, tais como  $\Lambda$  ( $\sim \sqrt{a}$ ) e  $\Gamma$  ( $\sim \sqrt{a(1-e^2)}$ ), ou dos argumentos principais do Hamiltoniano, por exemplo a diferença dos periastrós ( $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$ ) ou dos ângulos ressonantes (funções dos ângulos críticos,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ).

Dvorak et al. (2004), por exemplo, utiliza em seu trabalho o chamado método da máxima excentricidade, no intuito de investigar zonas de estabilidade para planetas terrestres fictícios próximos aos pontos de Lagrange L4 e L5 em determinados sistemas exoplanetários. A ideia é bastante simples, e consiste em monitorar o valor máximo da excentricidade  $e_i$  do  $i$ -ésimo corpo ao longo de uma simulação numérica da evolução do sistema. No caso de órbitas que inicialmente apresentam valores de excentricidade relativamente alto, é adequado analisar a amplitude da variação de  $e$ , isto é,  $\Delta e = e_{\max} - e_{\min}$  (Ramos et al., 2015).

Na mesma linha de raciocínio, pode-se analisar as amplitudes de variação de outros elementos orbitais, tais como  $\Delta a$ . Embora não seja um indicador de movimento caótico, os indicadores de estrutura são, em geral, úteis para mapear as estruturas ressonantes em

problemas de  $N$ -corpos (Ramos et al., 2015; Beaugé e Cincotta, 2019; Alves Silva et al., 2021).

O uso de indicadores de caos e parâmetros de estrutura dinâmica como ferramentas numéricas para construção de **mapas dinâmicos** foi bastante popularizado, especialmente diante do avanço nos métodos computacionais ao longo dos últimos 50 anos. Trata-se, na realidade, de uma tarefa relativamente simples: uma grade de condições iniciais, tomadas sobre um plano representativo,  $(a, e)$ , por exemplo, é integrada em um intervalo de tempo  $T$  suficientemente longo. Em geral, significa simular por tempos que sejam superiores ao período típico do ângulo mais lento (secular) do sistema. Ao longo de  $T$ , os indicadores, de caos e/ou estrutura, são computados, e ao final da simulação, têm seus valores graficados em escala de cores sobre o plano de condições iniciais.



### ■ Instável em $t < 5 \times 10^6$ anos

Figura 2.6: Mapas dinâmicos construídos sobre o plano representativo  $(a_2, e_2)$  do sistema exoplanetário HD 181433. Em cada painel, uma grade de  $10^4$  condições iniciais foi simulada por tempo máximo de  $5 \times 10^6$  anos. Soluções instáveis estão indicadas por pontos amarelo-pretos. O mapa esquerdo mostra as estruturas de  $\Delta e_2$ , isto é, a amplitude máxima de variação da excentricidade do corpo externo. À direita, plotamos em cores os valores de  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$

A Figura 2.6 fornece um exemplo de dois mapas dinâmicos, construídos para uma grade de  $100 \times 100 = 10^4$  condições iniciais tomadas do espaço representativo  $(a_2, e_2)$  do sistema HD 181433<sup>7</sup> (Cincotta et al., 2021; Alves Silva et al., 2021). Cada solução foi

<sup>7</sup> Neste caso, o conjunto de condições simuladas representa o mesmo espaço amostral que foi usado para

simulada em  $T = 5 \times 10^6$  anos, e as condições que resultaram em escapes/colisões estão indicadas em pontos pretos. No painel esquerdo, a escala de cores parametriza os valores do indicador de estrutura  $\Delta e = e_{2,\max} - e_{2,\min}$ ; à direita, cada solução está associada ao respectivo valor calculado para o MEGNO reescalado: neste último caso, tomamos o logaritmo  $\log_{10}\langle Y' \rangle = \log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ <sup>8</sup>. Órbitas regulares ( $\langle Y \rangle \leq 2$ ) estão indicadas pelos tons escuros no painel direito, para os quais o  $\log_{10}\langle Y' \rangle = -2$ . Valores de  $\langle Y \rangle > 3$  ( $\log_{10}\langle Y' \rangle \gtrsim 0$ ) são mostrados com tonalidade mais claras. As regiões para as quais  $2 < \langle Y \rangle \lesssim 3$  equivalem a  $-2 < \log_{10}\langle Y' \rangle < 0$ , nas quais as órbitas apresentam caos moderado<sup>9</sup>.

## 2.5 Entropia: breve revisão

*Entropia* é um princípio fundamental da termodinâmica e da mecânica estatística, e que remonta a estudos desenvolvidos há mais de um século atrás, por nomes tais como Clausius, Kelvin, Helmholtz, Gibbs, Boltzmann e Maxwell, para citar os mais famosos. De maneira mais geral, a entropia relaciona os estados macroscópicos e microscópicos da matéria, e através dessa relação, determina o comportamento físico de sistemas macroscópicos em equilíbrio, ou próximos ao equilíbrio.

A famosa fórmula devida a Ludwig von Boltzmann (1844-1906), que define a entropia  $S$  de um gás ideal, é escrita como

$$S = k_B \ln W, \quad (2.18)$$

onde  $k_B$  designa uma constante física convenientemente chamada constante de Boltzmann. Tal relação estabelece a conexão entre uma variável de estado,  $S$ , e a “quantidade de caos”, ou desordem, de um sistema, representada aqui pela função multiplicidade,  $W$ . Mais precisamente,  $W$  refere-se ao número de microestados acessíveis e de mesmas propriedades macroscópicas em um dado sistema termodinâmico. Como o tratamento de Boltzmann considerava a mecânica clássica, a ideia de “número de microestados” não constituía um

---

construir o diagrama da Figura 2.4.

<sup>8</sup> No intuito de obter uma separação mais fina entre os níveis caóticos de domínios próximos, e assim melhorar a análise do espaço de fase, é interessante construir um mapa dinâmico de Megno em termos do logaritmo de  $\langle Y' \rangle = \langle Y \rangle - 1.99$  (Gallardo et al., 2021; Alves Silva et al., 2021), isto é,  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ .

<sup>9</sup> A palavra moderado, neste caso, apresenta um significado pouco preciso. Mas trata-se da melhor tradução para o que, na literatura, é denominado *mildly chaotic solution*.

conceito formal, e então ele tomou a ideia de um volume do espaço de fase, dividido pelo volume de uma (arbitrariamente definida) “célula unitária” (Wehrl, 1978). Esse detalhe é crucial para entender, no contexto deste trabalho, a aplicação da entropia à dinâmica planetária.

Além disso, expressão (2.18) considera sistemas nos quais o número de microestados acessíveis têm igual probabilidade de ocorrência. Mais tarde, Willard Gibbs (1839-1903) reformulou o conceito de entropia, considerando estados não-equiprováveis,

$$S_G = -k_B \sum_i p_i \ln p_i, \quad (2.19)$$

onde  $p_i$  designa a probabilidade de acesso ao  $i$ -ésimo microestado.

## 2.6 A teoria da informação de Claude Shannon

A base teórica do que hoje é conhecida como Teoria da Informação está registrada no trabalho de Shannon e Weaver (1949). Nele, Claude Shannon (1916-2001) introduziu um modelo simples, porém bastante geral, de comunicação. A ideia pode ser resumida nesta sequência: (i) um transmissor emite um sinal que contém informação (uma mensagem); (ii) o sinal é corrompido por interferência externa (ruído, ou *noise*); (iii) o sinal chega ao receptor, aonde é decodificado, e a informação, assimilada. Ao longo desse processo, duas ideias atuam com um papel-chave: primeiro, isolar a informação do ruído, de forma independente entre si; segundo, modelar ambos, informação e ruído, de forma probabilística. Antes da teoria proposta por Shannon, é importante entender-se que o problema de comunicação era visto como uma questão determinística de reconstrução de um sinal emitido. Shannon foi pioneiro em perceber a incerteza como chave para a comunicação<sup>10</sup>.

Na Figura 2.7, vemos um diagrama esquemático do processo de comunicação, conforme idealizado por Claude Shannon e registrado em seu trabalho (Shannon e Weaver, 1949).

Shannon estabeleceu uma base matemática para descrição de leis de comunicação, introduzindo novas ideias, dentre elas o conceito da taxa de entropia  $S$  de informação, a qual convencionou-se chamar entropia Shannon, dentro de um modelo probabilístico. Sabe-se que *entropia* é uma medida da “quantidade de caos”, ou da falta de informação,

<sup>10</sup> Um texto bastante interessante acerca do trabalho pioneiro de Claude Shannon pode ser conferido no sítio <https://www.quantamagazine.org/how-claude-shannons-information-theory-invented-the-future-20201222/>

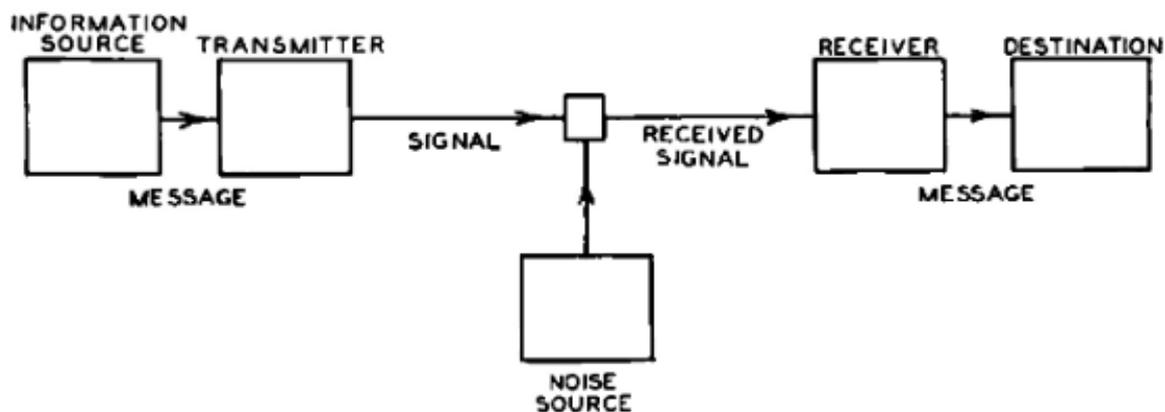


Figura 2.7: Diagrama esquemático apresentado em Shannon e Weaver (1949), mostrando o que Shannon descreve como um sistema de comunicação genérico.

dentro de um sistema. A entropia Shannon tem sido largamente utilizada em diferentes ramos da matemática, para além da teoria da comunicação.

### 2.6.1 Entropia Shannon aplicada à dinâmica planetária

Os trabalhos de Cincotta e Giordano (2018) e Giordano e Cincotta (2018) apresentaram uma aplicação do conceito de entropia Shannon à análise de sistemas dinâmicos multidimensionais. Neles, os autores mostraram que a evolução de  $S$  ao longo do tempo,  $dS/dt$ , pode ser associada à uma estimativa da taxa de difusão (ou *difusibilidade*),  $D_S$ , das ações sobre o espaço de fase, dado um conjunto de condições iniciais destas mesmas ações. Mais tarde, Beaugé e Cincotta (2019) estenderam o método ao contexto da mecânica celeste, aplicando tal abordagem ao estudo do problema de três corpos restrito, para o caso de uma RMM asteroidal de razão 2:1. Neste trabalho, eles ainda foram capazes de demonstrar que a difusibilidade  $D_S$  pode ser relacionada à uma estimativa dos tempos de instabilidade intrínsecos à cada solução do domínio do espaço de fase do sistema, uma medida que, ali, convencionaram chamar de tempos de escape, tais que  $\tau_{\text{esc}}(S) \sim 1/D_S$ , por estar associada ao tempo de disrupção do sistema, no sentido amplo do termo<sup>11</sup>: o instante no qual a órbita do asteróide cruza (escapa) a órbita do perturbador externo, rompendo assim a

<sup>11</sup> O dicionário *online* Michaelis de Língua Portuguesa apresenta como primeiro e segundo significados de disrupção as seguintes definições: “(1) Ato ou efeito de romper(-se); dirupção, fratura; (2) quebra de um curso normal de um processo”. Fonte: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues>

ligação gravitacional com o sistema.<sup>12</sup>

Uma extensa lista de resultados pode ser devidamente verificada em Giordano e Cincotta (2018), Cincotta e Giordano (2018), Beaugé e Cincotta (2019), Cincotta e Shevchenko (2020), Cincotta et al. (2021), Cincotta et al. (2021) e Alves Silva et al. (2021). Recomendamos uma consulta aos trabalhos mencionados a fim de um estudo mais aprofundado acerca das definições e demonstrações pertinentes. Além disso, no Apêndice A desta tese, apresentamos alguns detalhes acerca da metodologia de medição da entropia Shannon. No texto que segue, elucidamos apenas os conceitos fundamentais.

Consideramos um par de variáveis do tipo ação,  $I_k = a_k$  e  $J_k = a_k(1 - e_k^2)$ ,  $a_k$  e  $e_k$  sendo os respectivos elementos orbitais, semi-eixo e excentricidade, do  $k$ -ésimo corpo do sistema. Dada uma condição inicial, as equações de movimento são resolvidas numericamente, utilizando o código `Ncorp`, dentro de um intervalo  $T$  de integração.

As evoluções dos semi-eixos e excentricidades são então projetadas sobre o plano de fase  $(I, J)$ , sobre o qual é construída uma partição adequada. A partição consiste de um número  $q$  de células bidimensionais, distinguíveis, que definem uma região retangular de área  $[-\Delta I, \Delta I] \times [-\Delta J, \Delta J]$ , centrada na condição inicial  $(a_0, e_0)$  correspondente àquela integração. Ao longo da simulação, uma quantidade  $q_0 \leq q$  de células será preenchida pelos valores de fase  $(I(t), J(t))$ ,  $t \leq T$ , de acordo com uma probabilidade de ocupação da  $k$ -ésima célula,  $\mu_k$  (Giordano e Cincotta, 2018; Cincotta e Giordano, 2018; Cincotta e Shevchenko, 2020). A partição sempre é construída sobre o plano de fases de todos os  $N_p$  planetas do sistema em questão.

Teoricamente, a entropia Shannon  $S$  será definida como (Wehrl, 1978; Cincotta e Shevchenko, 2020)

$$S(t) = - \sum_{k=1}^q \mu_k(t) \ln \mu_k(t), \quad (2.20)$$

onde  $\mu_k$  define a medida probabilística associada à ocupação do  $k$ -ésima célula (microestado) do sistema.

Para tempos discretos  $t$  tais que  $0 \leq t \leq T$ , sendo  $T$  o tempo total da integração

---

<sup>12</sup> Na literatura, o termo tempo de escape pode ser correspondido pelos conceitos de **tempo de eventualidade** (*event time*), **tempo de cruzamento** (*crossing time*) ou **tempo de mudanças/transições repentinas** (*time of sudden changes*) (Lecar et al., 1992; Franklin et al., 1993), comuns no caso do problema de três corpos restrito. Para a dinâmica planetária, pode-se encontrar o termo **tempo de estabilidade macroscópico** (Morbidelli e Froeschlé, 1996).

numérica, o número de pontos integrados pela simulação será uma função monotônica de  $t$ , dada por  $Z(t) = t/h$ , onde  $h$  é a taxa de amostragem (tempo de saída dos dados numéricos). Cada ponto integrado  $(I(t), J(t))$  pode então ser mapeado sobre o plano de fase, e uma quantidade  $n_k(t)$  contabiliza o número de vezes no qual as variáveis  $(I(t), J(t))$  “preenchem” a  $k$ -ésima célula da partição. Um valor  $q_0 \leq q$  corresponderá ao número de células preenchidas ao longo de  $t \leq T$ . A entropia Shannon  $S(t)$  pode então ser escrita como

$$S(t) = \ln Z - \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{q_0} n_k \ln n_k, \quad (2.21)$$

A Figura 2.8 ilustra o processo de preenchimento das células no plano de fase generalizado  $(I, J)$ . É intuitivo entender que os pontos vermelhos representam valores de fase  $(I(t), J(t))$  que preencheram  $q_0 \leq q$  células em  $t \leq T$ .

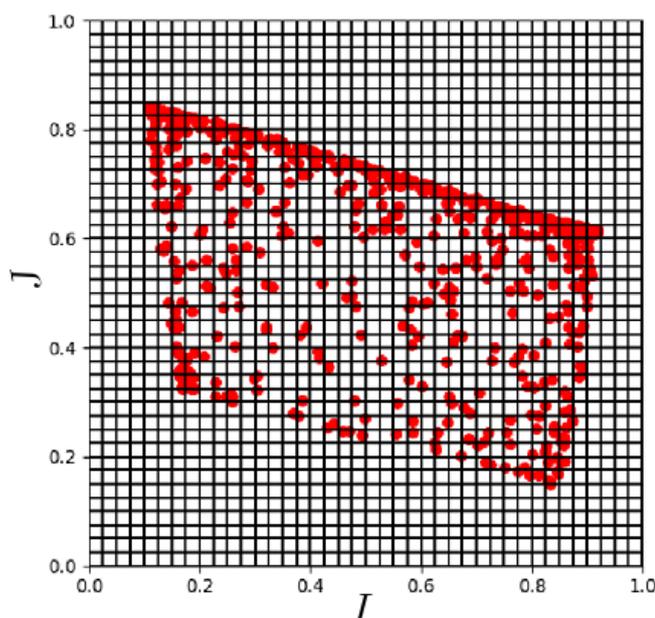


Figura 2.8: Ilustração do espaço de fase generalizado  $(I, J)$ , particionado em  $q$  células bidimensionais. Os pontos vermelhos representam os valores de fase  $(I(t), J(t))$  que preenchem  $q_0 \leq q$  células da partição  $\mathcal{P}(\Sigma, q)$ .

Os limites da partição, determinados pelas quantidades  $\Delta I$  e  $\Delta J$ , são dados em termos do critério de estabilidade de Hill (Marchal e Bozis, 1982; Gladman, 1993). Define-se um valor mínimo,  $\Delta_{\min}^{(i,j)}$ , em função do *raio mútuo de Hill* (Marzari e Weidenschilling, 2002) das órbitas adjacentes:

$$\Delta_{\min}^{(i,j)} = 2\sqrt{3}R_{\text{Hill}}^{(i,j)}; \quad R_{\text{Hill}}^{(i,j)} = \frac{(a_i + a_j)}{2} \left[ \frac{m_i + m_j}{3m_0} \right]^{1/3}. \quad (2.22)$$

Órbitas adjacentes implicam no critério ser aplicado a corpos tais que  $j = i + 1$ ,  $i \geq 1$ . Seguindo esse raciocínio, definimos um intervalo  $\Delta a_{i,j} \equiv \Delta_{\min}$  para os semi-eixos dos  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo planetas. Para as excentricidades, o limite estabelecido foi fixado em  $\Delta e = 0.5$ . Usando condições numéricas dentro do código, os casos singulares  $e_0 - \Delta e < 0$  e  $e_0 + \Delta e > 1$  são facilmente evitados. Finalmente, os valores de  $\Delta a$  e  $\Delta e$  são empregados para obter os limites  $\Delta I$  e  $\Delta J$  usuais para cada trajetória do problema<sup>13</sup>.

Além da partição, cada trajetória de um sistema é integrada em conjunto com um número  $n_{\text{ens}}$  de “órbitas-fantasmas” (ou “órbitas-sombras”), que formam assim um ensemble de trajetórias (Beaugé e Cincotta, 2019; Cincotta et al., 2021; Alves Silva et al., 2021). Cada trajetória-sombra parte de um ponto deslocado de valores  $(\delta a, \delta e)$  em relação ao ponto inicial nominal,  $(a_0, e_0)$ , no plano de fase. Junto com a integração “original”, tem-se um conjunto  $n_{\text{ens}} + 1$  que fornece uma estatística considerável para a computação de um valor médio da entropia  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq N_p$ .

Ao longo da integração,  $S(t)$  é calculada concomitantemente às soluções das equações de movimento. A média temporal da derivada de  $S$ ,  $\langle dS(t)/dt \rangle$ , também é calculada computacionalmente, através de um “fit” de mínimos quadrados feito sobre o conjunto de dados gerados de  $S(t)$ . Uma quantidade  $D_S$ , chamada difusividade, é associada à taxa com a qual as ações  $(I(t), J(t))$  se difundem sobre uma área  $\Sigma(I, J)$  do plano de fase. Nominalmente,

$$D_{S,i} = \frac{\Sigma(I, J)}{q} q_{0,i}(t) \left\langle \frac{dS_i(t)}{dt} \right\rangle, \quad (2.23)$$

conforme é apresentado em Cincotta et al. (2021); Cincotta et al. (2021). Na Equação (2.23), note-se que a difusividade está associada a um subíndice  $i$ , que refere-se à trajetória do  $i$ -ésimo corpo que é resolvida numericamente. Assim, um tempo de instabilidade individual é obtido, definido como

$$\tau_{\text{inst},i} = \frac{(\Delta I_i)^2 + (\Delta J_i)^2}{D_{S,i}}, \quad (2.24)$$

aonde  $\Delta I_i$  e  $\Delta J_i$  determinam o semi-comprimento do retângulo da partição, cujo centro é a condição inicial  $(I_{0,i}, J_{0,i})$ ,  $1 \leq i \leq N_p$ .

<sup>13</sup> É importante ressaltar que, no presente contexto,  $\Delta a$  e  $\Delta e$  nada têm a ver com os indicadores de estrutura definidos anteriormente. Neste caso, nos referimos a limites de comprimento tomados dentro do plano de fase  $(a, e)$ , sobre o qual a partição é virtualmente construída.

Finalmente, uma escala de tempo de instabilidade global para o sistema pode ser obtida, como o mínimo valor dentre todos os  $\tau_{\text{inst},i}$  calculados, isto é,

$$\tau_{\text{inst}} \equiv \min(\tau_{\text{inst},i}), \quad 1 \leq i \leq N_p. \quad (2.25)$$

Para um dado conjunto de condições iniciais, (2.25) é associado à expectativa de tempo dentro da qual as instabilidades dinâmicas se manifestam em escalas macroscópicas do espaço de fase, e a disrupção do sistema é altamente provável.

Uma descrição mais pormenorizada sobre os fundamentos do cálculo da entropia  $S$ , e a partir desta última obter de um coeficiente de difusão caótica  $D_S$ , está apresentada no Apêndice desta tese. Lembramos que detalhes teóricos também podem ser conferidos nos trabalhos de Cincotta e Giordano (2018), Giordano e Cincotta (2018), Cincotta e Shevchenko (2020) e Beaugé e Cincotta (2019).



## HD 20003

O sistema exoplanetário HD 20003 foi descrito pela primeira vez por Mayor et al. (2011), como um dos resultados observacionais de um *survey* de 8 anos feito com o espectrógrafo do projeto HARPS. Em seguida, Gillon et al. (2017) e Udry et al. (2019) confirmaram em seus estudos que o sistema é composto ao menos de dois planetas com massas da ordem de Netuno, nomeados HD 20003b e HD 20003c, de períodos curtos, de cerca de alguns dias, e cuja razão estaria próxima à comensurabilidade de movimentos médios 3:1. Mais além, Udry et al. (2019) sugeriu a possibilidade de um terceiro planeta, cuja órbita seria externa aos dois primeiros, descrevendo uma trajetória aproximadamente seis vezes maior que a órbita mais interna (HD 20003b)

Em termos gerais, o sistema HD 20003 orbita uma estrela de sequência principal, uma anã do tipo espectral G, como o Sol, cuja massa está estimada em  $m_0 \approx 0.875 M_\odot$  (Udry et al., 2019). A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros orbitais que foram derivados da análise dos dados de velocidade radial, e conforme constam em Udry et al. (2019). Estão expostos os respectivos valores de massa mínima ( $m \times \sin I$ ), semi-eixo maior ( $a$ ), excentricidade ( $e$ ), período orbital ( $P$ ), argumento de pericentro ( $\omega$ ), e os valores com os tempos de passagem no periastro ( $T_0$ ) de cada órbita. Os valores de  $T_0$  foram importantes, em nossa análise, para calcular os valores iniciais das anomalias médias ( $\mathcal{M}$ ) de cada planeta, expostos na última linha da Tabela 3.1.

No texto que segue ao longo deste capítulo, definimos o corpo interno, HD 20003b, como planeta 1, e o corpo externo, HD 20003c, planeta 2. As respectivas massas e elementos orbitais estão indicados seguindo a mesma convenção. Na Figura 3.1, apresentamos uma ilustração esquemática das duas órbitas planetárias confirmadas, obtidas a partir de uma integração de  $10^5$  anos feita com o código `Ncorp`, partindo das condições iniciais dadas pela

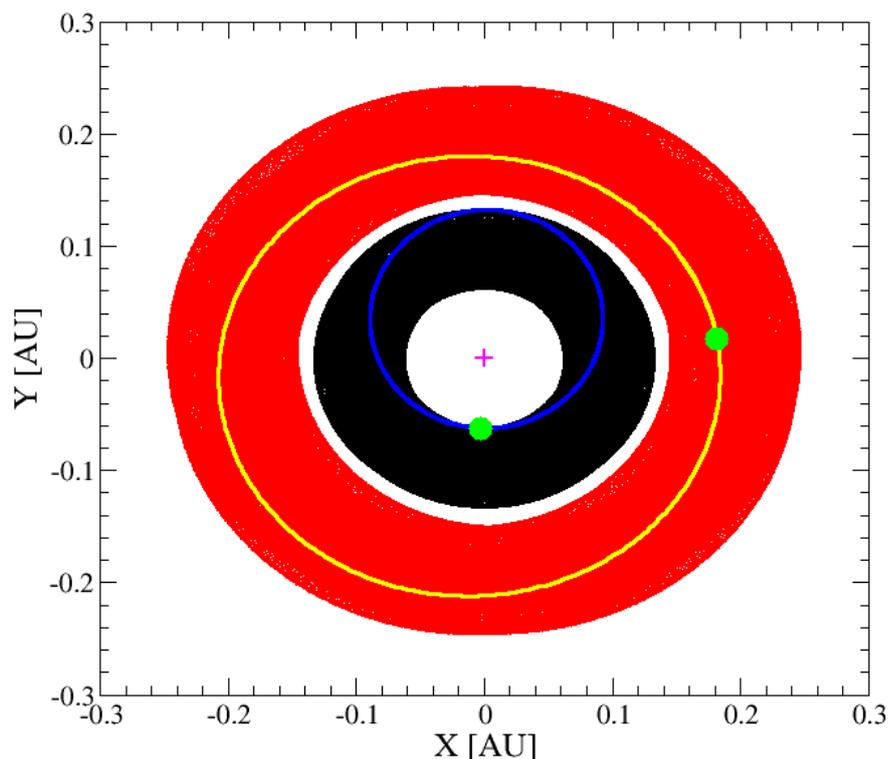
Tabela 3.1 - Valores iniciais da melhor solução orbital derivada para o sistema HD 20003, obtida através de ajuste de modelo Kepleriano aos dados de velocidade radial, conforme apresentado por Udry et al. (2019).

Parâmetros	Unidade	HD 20003 b	HD 20003 c
$m \times \sin i$	[ $M_{\oplus}$ ]	$11.66^{+1.04}_{-1.06}$	$14.44^{+1.47}_{-1.39}$
$a$	[UA]	$0.0974^{+0.0034}_{-0.0039}$	$0.1964^{+0.0068}_{-0.0078}$
$e$		$0.36^{+0.05}_{-0.05}$	$0.1^{+0.08}_{-0.07}$
$P$	[dia]	$11.8482^{+0.0016}_{-0.0017}$	$33.9239^{+0.0239}_{-0.0266}$
$\omega$	[grau]	$-92.74^{+8.52}_{-8.61}$	$53.33^{+45.83}_{-34.56}$
$T_0$	[BJD-2400000]	$55489.5110^{+0.2090}_{-0.2095}$	$55493.2516^{+4.4223}_{-3.2265}$
$\mathcal{M}$	[grau]	320.3	53.3

Tabela 3.1. Os resultados são mostrados em variáveis de posição retangulares. Para esta simulação, aplicamos o conjunto de coordenadas de Jacobi<sup>1</sup>. No quadro, a cruz ao centro representa a posição da estrela, e os círculos verdes indicam as posições iniciais de cada planeta. As linhas fortes (azul e amarela) destacam um período orbital completo para cada um dos corpos.

O painel esquerdo da Figura 3.2 apresenta um mapa dinâmico parametrizado por  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ , construído no plano  $(a_1, e_1)$ , e resultante da integração de um conjunto de  $400 \times 400 = 1.6 \times 10^5$  condições iniciais em um intervalo de  $T = 10^4$  anos, para o qual manteve-se a massa  $m_2$  fixa em sua posição nominal, dada de acordo com a Tabela 3.1. No mapa, uma estrutura de fase associada à ressonância de movimentos médios 3:1 aparece destacada, e está indicada na figura com uma linha vertical vermelha. Ao longo do eixo  $y$  ( $e_1$ ), ao centro do painel, nota-se uma região de órbitas de comportamento mais regular ( $\langle Y \rangle \lesssim 2.1$ ), que se alarga conforme  $e_1$  cresce. Essa região do mapa está contornada por faixas reminiscentes de separatrizes, estruturas que tipicamente marcam a transição entre domínios de regimes dinâmicos diferentes. A posição nominal do sistema (que chamaremos aqui de condição C0) está marcada pelo ponto preto, e aparece fora do domínio aonde predomina a comensurabilidade. O ponto branco no mapa indica uma segunda condição, C1, para a qual o valor inicial da excentricidade interna foi tomado  $e_1 = 0.4589$ . Essa condição inicial é usada no intuito de comparar comportamentos dinâmicos em diferentes

<sup>1</sup> Embora os elementos orbitais dados por Udry et al. (2019) tenham sido derivados considerando um sistema de coordenadas astrocêntricas, as dimensões de massa do problema garantem que não haverá um desvio considerável entre as órbitas simuladas quando aplicamos variáveis de posição de Jacobi.



*Figura 3.1:* Ilustração esquemática do sistema planetário HD 20003, considerando a solução obtida por Udry et al. (2019). As trajetórias de cada corpo foram obtidas a partir de simulações feitas para  $10^5$  anos, considerando um sistema de referência dado em coordenadas canônicas de Jacobi. A cruz ao centro representa o corpo central (estrela); os círculos verdes indicam as posições iniciais dos planetas, segundo dado pela Tabela 3.1. As linhas largas coloridas indicam um período completo para cada trajetória simulada.

posições no espaço de fase. Repare que C1, diferentemente de C0, aparece dentro de um região dominada por caos ( $\langle Y \rangle \gg 2$ ).

O painel à direita apresenta um *zoom* do mapa MEGNO na vizinhança próxima a C0 e C1 (destacada pelo retângulo branco no painel esquerdo). Percebe-se um recuo das estruturas do espaço de fase, formando algo parecido com reentrâncias, e que poderiam ser indicativos de *overlaps* de ressonâncias de altas ordens (de fato, duas delas estão marcadas por linhas verticais, no entorno de C0 e C1, identificadas nas razões 20:7 e 23:8). Neste *plot*, vemos que C0 é uma condição que encontra-se na região fronteira entre um domínio mais regular ( $e_1 \lesssim 0.4$ ) e um mar caótico que ocorre em altas excentricidades, dentro do qual está localizada C1.

Os resultados de duas integrações mais longas feitas com o código *Ncorp*, tomando as condições C0 e C1 indicadas nos mapas da Figura 3.2, estão mostrados nos painéis da Figura 3.3. No lado esquerdo, vemos a evolução do semi-eixo (quadro superior) e da

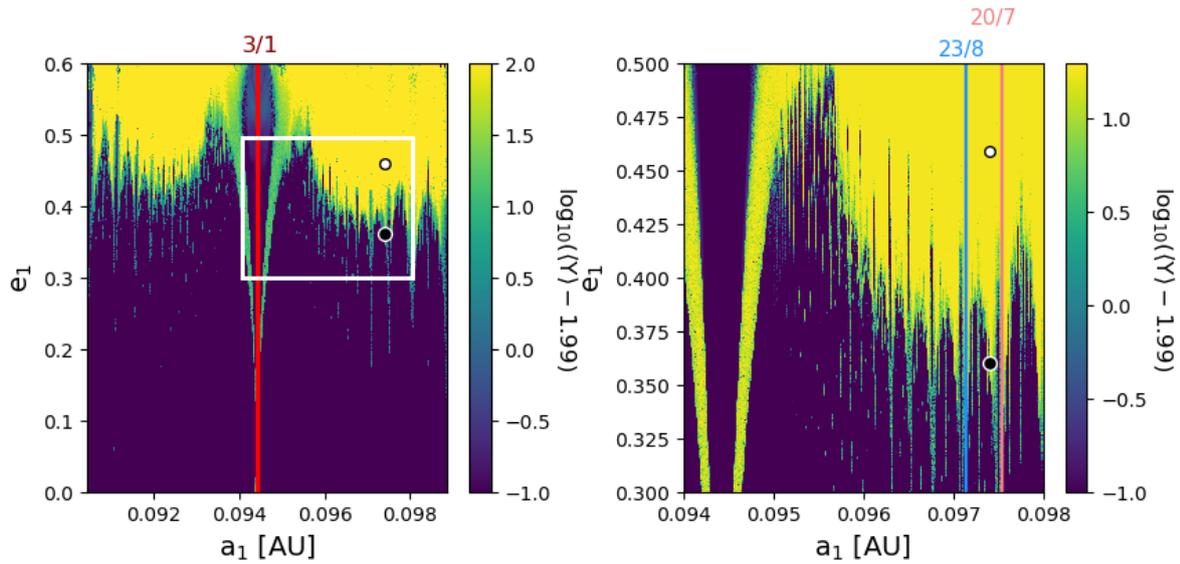


Figura 3.2: Mapa dinâmico parametrizado por  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ , construído para uma grade de  $400 \times 400 = 1.6 \times 10^5$  condições iniciais do plano de fase  $(a_1, e_1)$ , e com tempo total de integração  $T = 10^4$  anos. À esquerda, vemos o mapa completo, e à direita, mostramos uma ampliação dele, tomada para a região destacada pelo retângulo branco. As linhas verticais destacam as posições nominais das ressonâncias, nominalmente indicadas no alto de cada painel.

excentricidade (quadro central) para o planeta 2, obtidas como solução da condição C0. Analogamente, o lado direito apresenta a solução numérica da condição C1.

A solução para C0 mostra uma evolução aproximadamente constante de  $a_2$ , e uma análise mais fina do movimento de  $e_2$  revelou um comportamento secular bem definido, com um período aproximado de 2500 anos, conforme está mostrado nos painéis da Figura 3.4. Neles, vemos no gráfico superior a variação de ambas as excentricidades,  $e_1$  e  $e_2$ , e ao centro, observa-se o comportamento do ângulo secular  $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$ . A oscilação de amplitude limitada, e em torno de um ponto fixo, é comumente conhecida como libração. Neste caso, vemos  $\Delta\varpi$  librando em torno de 180 graus. No gráfico inferior da Figura 3.4, mostramos a evolução da quantidade  $n_1 - 3n_2$ , a combinação de movimentos médios para um RMM 3:1. Caso essa combinação oscilasse em torno de zero, seria um indicativo de configuração ressonante. Não é o caso da condição nominal C0.

De outro modo, a Figura 3.3 mostra que a solução de C1 tem um comportamento muito mais irregular, com variações intermitentes de  $a_2$  ao longo do tempo. Essas intermitências, que aparecem tanto em  $a_2$  quanto em  $e_2$ , reforçam a hipótese do *overlap* ressonante, e que, neste caso, implicaria no sistema incursionar por diferentes domínios de ressonâncias de altas ordens. Justamente por isso, tratam-se de ressonâncias mais fracas, que não têm

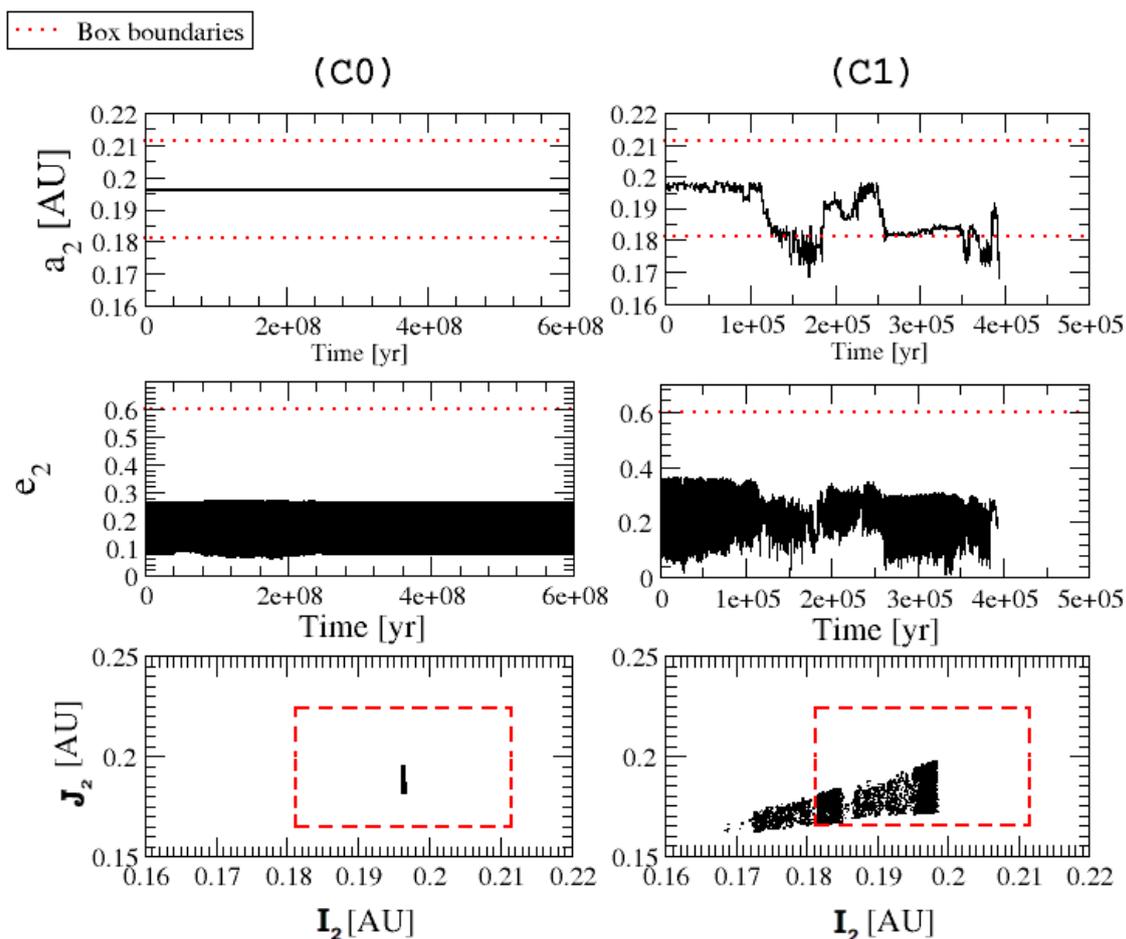


Figura 3.3: Soluções obtidas de longas integrações das condições iniciais C0 e C1 do sistema HD 20003. Veêm-se as evoluções do semi-eixo (painéis altos) e da excentricidade (painéis centrais) do planeta externo. Os painéis inferiores exibem os pontos integrados de cada solução, mostrados sobre no plano de  $(I_2, J_2)$ ,  $I_2 \sim \Lambda_2^2$ ,  $J_2 \sim \Gamma_2^2$ . As linhas vermelhas tracejadas indicam os limites da partição que é construída para mensurar a entropia Shannon: nos painéis superiores e centrais, as linhas mostram as fronteiras da partição no espaço de  $a_2$  e  $e_2$ ; nos painéis inferiores, as linhas delimitam a “caixa” da partição no plano  $(I_2, J_2)$ .

força para capturar o sistema, que fica sendo “jogado” de uma ressonância para outra. Os resultados da integração mostram que a solução é instável, com o sistema efetuando encontros próximos que eventualmente culminam em uma colisão entre os planetas em  $t \sim 4 \times 10^5$  anos.

Os dois painéis inferiores da Figura 3.3 mostram cada um dos pontos integrados das soluções, obtidos ao longo das simulações, e projetados sobre plano do espaço de fase das pseudo-ações  $(I, J)$ , dadas pelo quadrado das ações clássicas de Delaunay<sup>2</sup>, onde defimos, para o  $k$ -ésimo corpo,  $I_k = a_k$  e  $J_k = I_k(1 - e_k^2)$ . Para as soluções de ambas as condições,

<sup>2</sup> Desprezando os fatores de massa, as ações clássicas de Delaunay ficam dependentes exclusivamente dos elementos orbitais  $a$  e  $e$ , de tal modo que  $\Lambda_i \sim \sqrt{a_i}$  e  $\Gamma_i \sim \Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2}$ ,  $i = 1, 2$ .

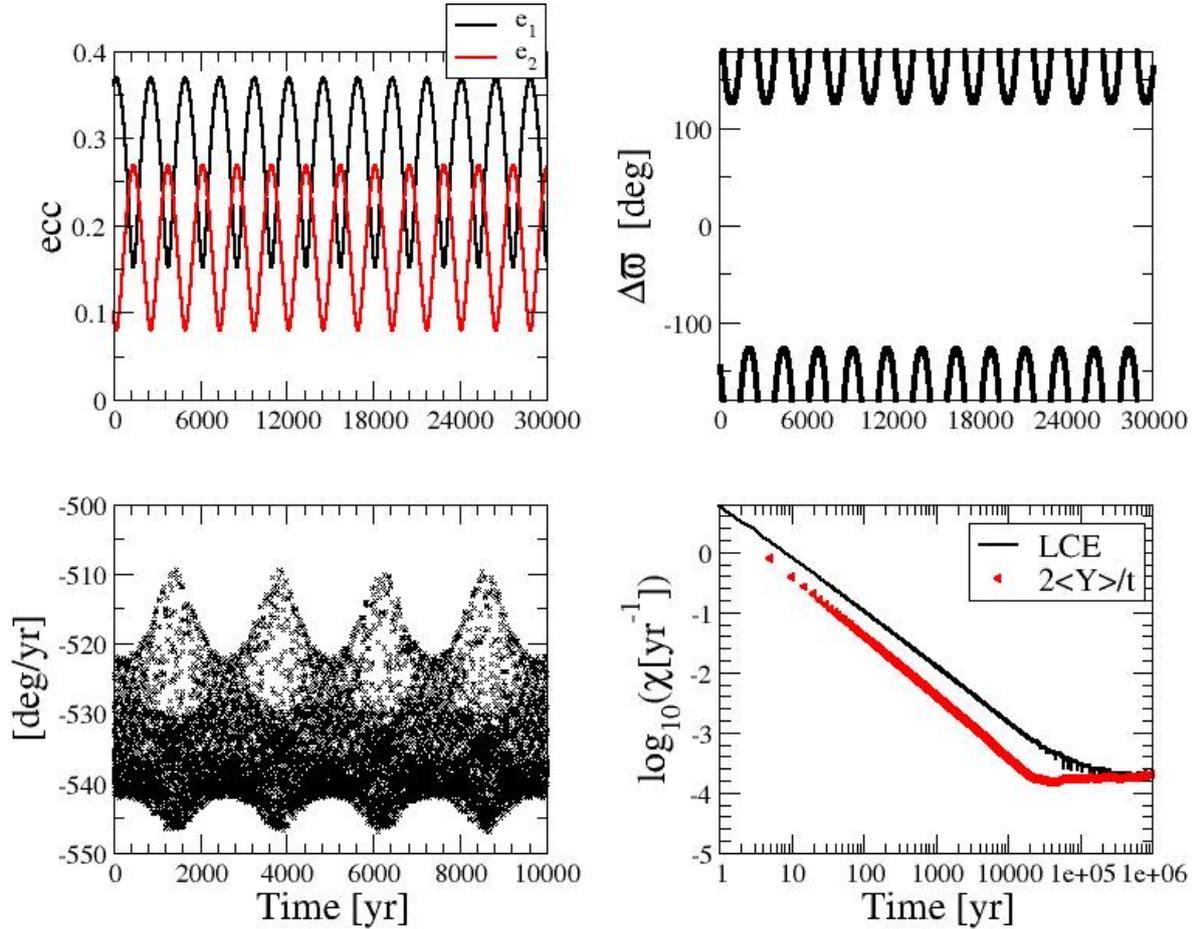


Figura 3.4: Solução de C0 integrada em  $10^6$  anos. Estão mostrados a evolução das excentricidades (esquerda) e do ângulo secular (direita),  $\Delta\omega$ , nos painéis superiores; e abaixo, vemos o comportamento temporal da combinação comensurável de movimentos médios de razão 3:1,  $n_1 - 3n_2$ , à esquerda; e à direita, a evolução LCE, utilizando o cálculo direto das equações variacionais (preto), e também obtido a partir da computação do MEGNO (vermelho).

mostramos somente as funções do corpo externo,  $(I_2, J_2)$ . Os pontos pretos indicam as sucessivas intersecções dos dados integrados com o plano de fase  $(I_2, J_2)$ . Assim, o que vemos nos painéis inferiores é o aspecto difusivo de cada solução, isto é, o quão longe cada trajetória se afasta do ponto inicial, que se encontra no centro da área delimitada pelos traços vermelhos. Em todos os painéis, as linhas tracejadas vermelhas marcam os limites da caixa da partição, construídos em termos dos raio mútu de Hill,  $R_{\text{Hill}}^{(1,2)}$  (veja Equação (A.2) no anexo A).

A solução para C1 “difunde-se” por uma área mais ampla, relativamente à solução C0, com os pontos iterados atingindo domínios além dos limites da partição. Por outro lado, a trajetória obtida para C0 se concentra em regiões mais próximas ao valor inicial. Neste caso, é possível estabelecer uma correlação direta entre o caráter caótico e instável de C1,

e seu comportamento mais difusivo, ou de difusão mais rápida, enquanto C0 apresenta difusão mais lenta, sendo assim mais estável. É importante enfatizar que excursões que superam as fronteiras da partição não implicam, necessariamente, em escapes/colisões entre as trajetórias (leia Beaugé e Cincotta (2019) para uma explicação mais detalhada a respeito).

Por fim, no painel inferior direito da Figura 3.4, vemos o comportamento temporal do cálculo do LCE ( $\chi$ ) relativo à trajetória integrada a partir de C0. A curva preta mostra o comportamento de  $\chi(t)$ , conforme obtido diretamente da solução das equações variacionais. A curva vermelha foi obtida a partir do fator  $\langle Y \rangle$  para a mesma trajetória, bastando aplicar a relação de equivalência  $2\langle Y \rangle/t$ . Ambos os resultados mostram acordo no limite  $t \rightarrow T$ , e para C0, obtivemos  $\chi \approx 1.6 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$ , o que implica um tempo de Lyapunov  $T_L \sim 6000$  anos, cerca de 2.5 vezes o período secular do sistema.

### 3.1 Experimentos numéricos com a entropia $S$

Na rotina aplicada para computar a entropia Shannon ( $S$ ), o cálculo de  $S$  e  $D_S$  é concomitante ao processo de solução das equações de movimento, através do `Ncorp`. Para tanto, existem determinados parâmetros que precisam ser definidos a priori. Alguns destes parâmetros estão diretamente associados à integração das soluções (por exemplo, o tempo total de simulação  $T$  e a taxa de amostragem  $h$  dos dados); outros estão associados propriamente ao processo numérico de calcular  $S$ , a saber: o número total de células da partição ( $q$ ), o tamanho do ensemble de “sistemas-fantasmas” ( $n_{\text{ens}}$ ), e o tamanho dos desvios dentro do ensemble ( $\delta a, \delta e$ ), em torno da condição original.

Nesta seção, apresentamos resultados que foram obtidos em testes quanto a sensibilidade do método mediante a escolha desses parâmetros, considerando uma aplicação ao estudo da estabilidade da condição fictícia C1, que foi tomada do plano de condições iniciais  $(a_1, e_1)$  do sistema HD 20003.

Neste experimento numérico, foram simuladas um total de 882 soluções da condição C1, admitindo variações no conjunto de parâmetros  $(T, h, q, \delta a, \delta e, n_{\text{ens}})$ , de tal maneira que se pudesse analisar se, porventura, as estimativas dos tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}$  são afetadas de algum modo pela escolha dos parâmetros numéricos (Cincotta et al., 2021). Nos painéis da Figura 3.5, exibimos diagramas de correlação entre os tempos de instabilidade

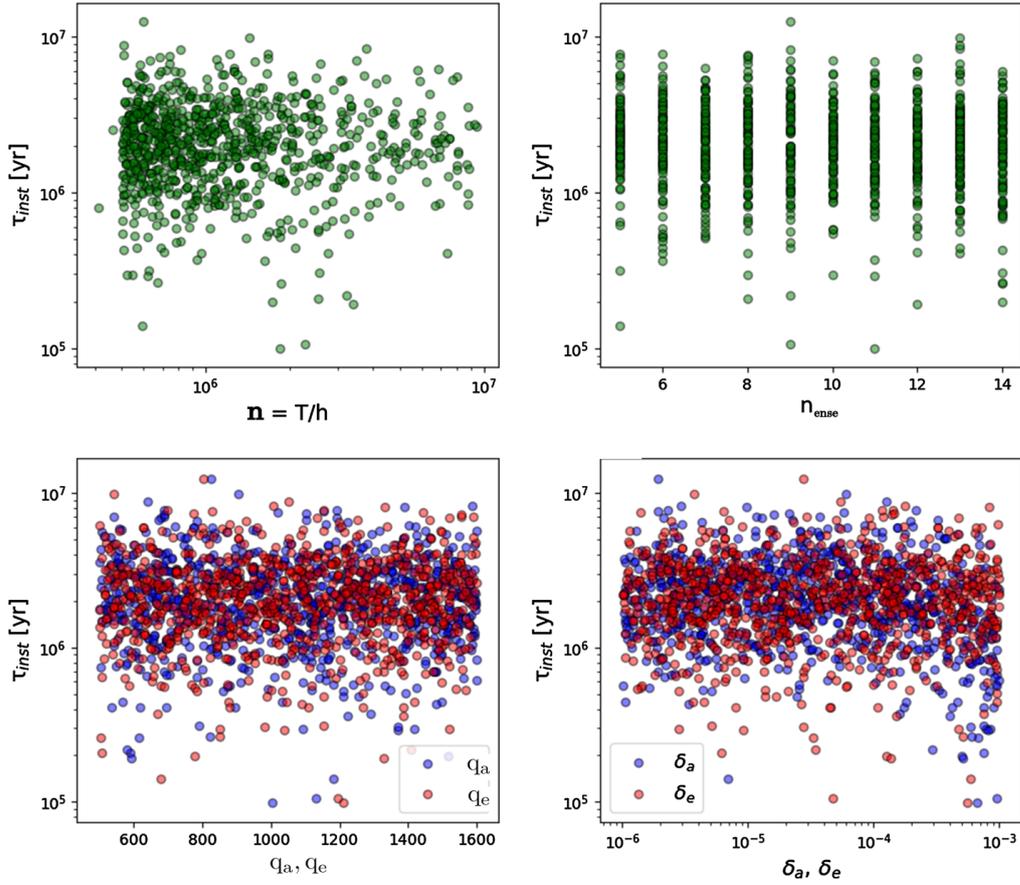


Figura 3.5: Diagramas de correlações entre os valores estimados para os tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , e distintas parametrizações numéricas intrínsecas da rotina de cálculo da entropia Shannon. No painel superior esquerdo, a correlação é mostrada entre  $\tau(S)$  e o número total de pontos gerados durante a integração  $n = T/h$ ; à direita, vemos a correlação entre  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e o tamanho do ensemble de sistemas-fantasma,  $n_{\text{ens}}$ . Abaixo, à esquerda, vemos a correlação de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e o número de células da partição,  $q_a$  e  $q_e$ ; à direita, a correlação é mostrada para  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e os intervalos  $(\delta_a, \delta_e)$ , que definem o limite da área na qual toma-se o ensemble.

$\tau_{\text{inst}}(S)$ , estimados via entropia Shannon (Equação (2.25)), e os parâmetros  $(T, h, q = q_a \times q_e, \delta_a, \delta_e, n_{\text{ens}})$ , variados aleatoriamente em cada simulação. Os intervalos de variação dos parâmetros estão mostrados no eixo  $x$  de cada painel: os valores de tempo de integração  $T$  foram tomados no intervalo  $[3 \times 10^4, 10^5]$  anos; o tempo de amostragem  $h$  variou dentro de  $[10^{-2}, 2 \times 10^{-1}]$  anos; o número de sistemas-fantasma variou entre  $n_{\text{ens}} = 5$  e  $n_{\text{ens}} = 14$ ; o número de células foi tomado dentro dos limites  $q_a, q_e \in [500, 1600]$ ; e os intervalos de dispersão dos ensembles tomados tais que  $\delta_a \in [10^{-6}, 10^{-3}]$ ,  $\delta_e \in [10^{-6}, 10^{-3}]$ .

Não é possível identificar qualquer correlação entre os valores estimados de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e os parâmetros livres do método. O que se vê são flutuações das estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , em torno de uma tendência central aparente de  $\bar{\tau}_{\text{inst}} \approx 2 \times 10^6$  anos, e com uma dispersão

aproximadamente menor que uma ordem de magnitude acima e abaixo desse valor central. No entanto, tais flutuações ocorrem em todos os casos, aparecendo em todos os painéis e ao longo da toda a extensão de cada intervalo de parametrização. Assim, não se pode afirmar que sejam devidas à escolha dos parâmetros do método. De outro modo, nos restou entender, nesse caso, o porque da ocorrência das flutuações dos tempos de instabilidade.

O que fizemos, em seguida, foi comparar os tempos  $\tau_{\text{inst}}(S)$  com os tempos de disrupção  $t_{\text{dis}}$ , obtidos através de longas simulações numéricas, usando somente a rotina `Ncorp`<sup>2</sup>. Obviamente, executamos as simulações considerando a condição inicial C1. A ideia, neste caso, foi tomar um retângulo de condições iniciais muito próximas, dentro do plano  $(a_1, e_1)$ . O centro do retângulo é justamente o valor nominal de C1. A extensão desse retângulo foi tal que 841 condições iniciais, de uma grade de  $29 \times 29$ , cobrissem a área delimitada por  $[0.0973, 0.0975]$  UA, em  $a_1$ , e  $[0.4588, 0.4590]$ , em  $e_1$ . Cada simulação foi integrada para um intervalo máximo de  $10^9$  anos. O tempo de disrupção  $t_{\text{dis}}$ , neste caso, constitui o tempo no qual a integração foi encerrada devido ao rompimento do sistema (fosse por colisão entre os planetas, escape do corpo externo ou colisão do corpo interno com a estrela).

Na Figura 3.6, mostramos uma comparação estatística entre os resultados do primeiro experimento, feito com a entropia Shannon (Figura 3.5), e o segundo, com as simulações diretas. Cada conjunto de dados está reduzido ao seu respectivo histograma, conforme mostra a legenda: em azul, representando as 841 simulações diretas; em laranja, as 882 integrações computando  $S$  e  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Nas ordenadas, vemos a frequência de ocorrência para os valores de tempo indicados no eixo das abcissas.

Observa-se que, em ambos os casos, os valores de tempos mostram flutuações, evidenciando que não existe um valor determinado para a colisão/escape do sistema. Em Alves Silva et al. (2021), foi demonstrado que mesmo aplicando simulações diretas, dentro de uma pequena região ao redor de um ponto do plano de condições iniciais de dado sistema dinâmico, e usando distintos integradores numéricos, é impossível obter-se um único valor para o tempo de disrupção  $t_{\text{dis}}$ . O que foi observado, de fato, foi uma dispersão dos tempos individuais de cada solução, na forma de uma distribuição log-normal (Rice et al., 2018; Hussain e Tamayo, 2020). É justamente o que vemos na Figura 3.6, para  $t_{\text{dis}}$  e para  $\tau_{\text{inst}}(S)$  (Cincotta et al., 2021).

---

<sup>2</sup> Chamaremos estas simulações de integrações diretas, pois consistem na “pura” solução das equações de movimento.

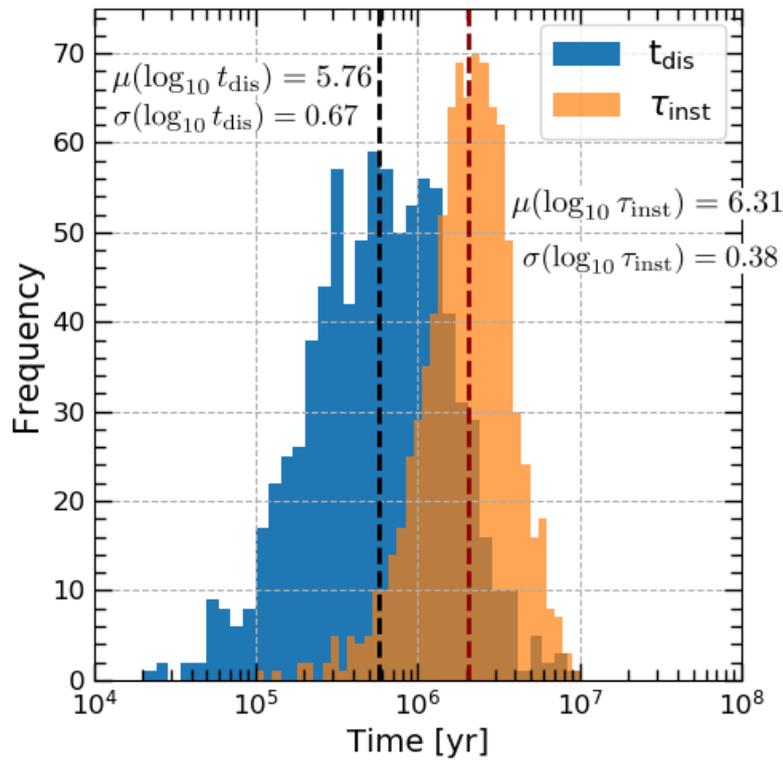


Figura 3.6: Histogramas construídos a partir de centenas de simulações das soluções para condições iniciais tomadas numa vizinhança “infinitesimal” de C1. Em azul, exibimos a contagem dos tempos de ruptura,  $t_{\text{dis}}$ , gerados de 841 simulações feitas a partir de uma malha de  $29 \times 29 = 841$  condições tomadas sobre o plano  $(a_1, e_1)$ . Em laranja, a contagem é feita para as 882 estimativas de tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}$ , as mesmas que foram mostradas anteriormente, na Figura 3.5. As linhas tracejadas mostram os valores esperados (médias)  $\mu$  para cada conjunto de dados, computados admitindo-se a forma log-normal das distribuições.

O perfil qualitativo obtido para ambos os resultados é bastante interessante, de curvas normais sobre um escala logarítmica. Em realidade, resultados semelhantes já haviam sido apontados nos trabalhos de Rice et al. (2018) e Hussain e Tamayo (2020). No primeiro deles, o estudo da dispersão de tempos de ruptura foi feito considerando-se longas simulações em integradores de  $N$ -corpos, para arquiteturas tipo *toy models* de sistemas de três planetas igualmente espaçados entre si. Ali, as distribuições dos tempos cobriam até duas ordens de magnitude. No segundo, os autores consideraram sistemas compactos, nos quais verificaram que os desvios padrões para as distribuições de tempos de instabilidades eram  $\sim 0.5$  ordens de magnitude.

Na Figura 3.6, os valores modais para cada conjunto de dados estão exibidos ao lado dos respectivos histogramas. Exibimos os valores médios ( $\mu$ ) e os desvios ( $\sigma$ ) de cada distribuição, computados levando em consideração que os dados são dados em um eixo de

escala logarítmica. Sendo assim, o tempo médio  $\bar{t}_{\text{dis}} \approx 5.754 \times 10^5$  anos, e  $\bar{\tau}_{\text{inst}} \approx 2.042 \times 10^6$  anos. É importante salientar, para o caso das estimativas de entropia Shannon, que as simulações utilizadas empregaram tempos de integração de, no máximo,  $1.5 \times 10^5$  anos.

### 3.2 Mapas dinâmicos de tempos de instabilidade

Da mesma maneira que os indicadores caóticos e de estrutura podem ser utilizados na construção de mapas dinâmicos, assim também aplicamos o tempo de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$  como um parâmetro de caracterização para um dado conjunto de condições iniciais tomadas de uma grade, igualmente espaçadas entre si, dentro do espaço de fase de um sistema planetário.

Na Figura 3.7, apresentamos dois mapas dinâmicos construídos sobre o plano de condições iniciais  $(a_1, e_1)$  do sistema HD 20003. O painel à esquerda mostra um mapa parametrizado pelo logaritmo do indicador MEGNO ( $\log_{10}\langle Y \rangle$ ), enquanto à direita vemos mapa de instabilidade,  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Ambos mostram a mesma região do plano de fase, na vizinhança próxima das condições C0 e C1, destacadas pelos pontos vermelho e verde, respectivamente. Em ambos os mapas, considerou-se uma grade de  $100 \times 100 = 10^4$  condições iniciais, integradas por  $T = 5 \times 10^4$  anos. No mapa de tempos de instabilidade, utilizamos um ensemble contendo  $n_{\text{ens}} = 5$  trajetórias-fantasmas além da própria condição original.

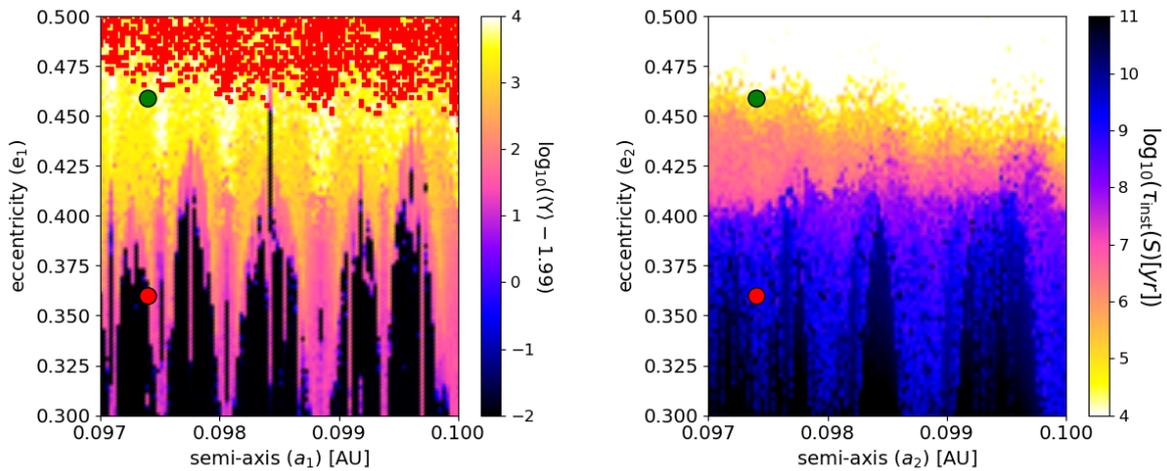


Figura 3.7: Mapas dinâmicos sobre o plano de fase  $(a_1, e_1)$ , para a vizinhança próxima da condição nominal do sistema. À esquerda, os resultados estão parametrizados pelo  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . À direita, mostramos um mapa de tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Ambos os mapas foram contruídos a partir de uma grade de  $100 \times 100$  condições iniciais, com cada solução integrada por  $T = 5 \times 10^4$  anos. No mapa MEGNO, os pontos vermelhos na porção superior do quadro indicam trajetórias instáveis em  $t < T$ .

De maneira geral, as estimativas de tempos de instabilidade obtidas a partir entropia  $S$  correspondem razoavelmente bem com o caos detectado a partir de  $\langle Y \rangle$ . Por um lado, o mapa MEGNO discrimina basicamente três regiões, uma regular (preta), uma levemente caótica (rosa) e outra fortemente caótica (amarela). Os pontos vermelhos na parte de cima do quadro esquerdo representam soluções instáveis. Vemos que a condição C0 está localizada justamente na fronteira entre os domínios regular e caótico, enquanto C1 é vista dentro do mar de caos mais intenso.

O mapa de tempos de instabilidade apresenta com certos detalhes as nuances do espaço de fase, e assim podemos observar as regiões intermediárias de instabilidade. A posição nominal do sistema, estando em uma região do espaço de fase cuja difusão é mais lenta, é assim associada a altos tempos de instabilidade ( $\tau_{\text{inst}} \gtrsim 10^9$  anos). C1, por sua vez, aparece em uma faixa do espaço de condições iniciais de difusão mais rápida, estando assim associada a tempos de instabilidades da ordem de algumas centenas de milhares de anos, justamente na fronteira da faixa branca, onde as soluções são instáveis em tempos  $\sim 10^4$  anos.

## HD 181433

O sistema HD 181433 é formado por um planeta em órbita de curto período, com massa próxima de Netuno ( $\sim 0.02 M_{\text{Jup}}$ ), e dois planetas gigantes de trajetórias mais amplas, todos eles orbitando uma estrela de tipo espectral K, de massa  $0.86 M_{\odot}$  (Trevisan et al., 2011). A primeira descrição do sistema foi proposta por Bouchy et al. (2009), na qual os autores verificaram a rápida instabilidade do sistema, em poucos milhares de anos (Horner et al., 2019). Duas novas soluções foram apresentadas em seguida, primeiro em Campanella (2011) e, mais recentemente, em Horner et al. (2019), ambas sugerindo que o sistema pode estar próximo a regiões de comensurabilidades de movimentos médios entre os dois corpos mais massivos, nas razões 5:2 e 7:1, respectivamente. Na Tabela 4.1, apresentamos os parâmetros orbitais de cada corpo, de acordo com o trabalho de Horner et al. (2019): são dados os valores para as massas mínimas ( $m \times \sin i$ ), os semi-eixos ( $a$ ), as excentricidades ( $e$ ), os períodos orbitais ( $P$ ), a longitude de pericentro ( $\varpi$ ), o tempo de passagem no periastro ( $T_0$ ) e as respectivas anomalias médias ( $\mathcal{M}$ ) calculadas a partir destes tempos.

Tabela 4.1 - Solução de 3 planetas para o sistema HD 181433, conforme obtida por Horner et al. (2019).

Parâmetros	Unidade	HD 181433 b	HD 181433 c	HD 181433 d
$m \times \sin i$	[ $M_{\text{Jup}}$ ]	$0.0223 \pm 0.0003$	$0.674 \pm 0.003$	$0.612 \pm 0.004$
$a$	[UA]	$0.0801 \pm 0.0001$	$1.819 \pm 0.001$	$6.60 \pm 0.22$
$e$		$0.336 \pm 0.014$	$0.235 \pm 0.003$	$0.469 \pm 0.013$
$P$	[dia]	$9.37452 \pm 0.0002$	$1014.5 \pm 0.6$	$7012 \pm 276$
$\varpi$	[grau]	$210.4 \pm 2.5$	$8.6 \pm 0.7$	$241.4 \pm 2.4$
$T_0$	[BJD-2400000]	$52939.16 \pm 0.06$	$52184.3 \pm 1.9$	$46915 \pm 239$
$\mathcal{M}$	[grau]	-	267.87	309.28

A arquitetura atualmente adotada para o sistema (Horner et al., 2019), tomada como a condição nominal nesta tese, está esquematizada na Figura 4.1. Nela, mostramos uma

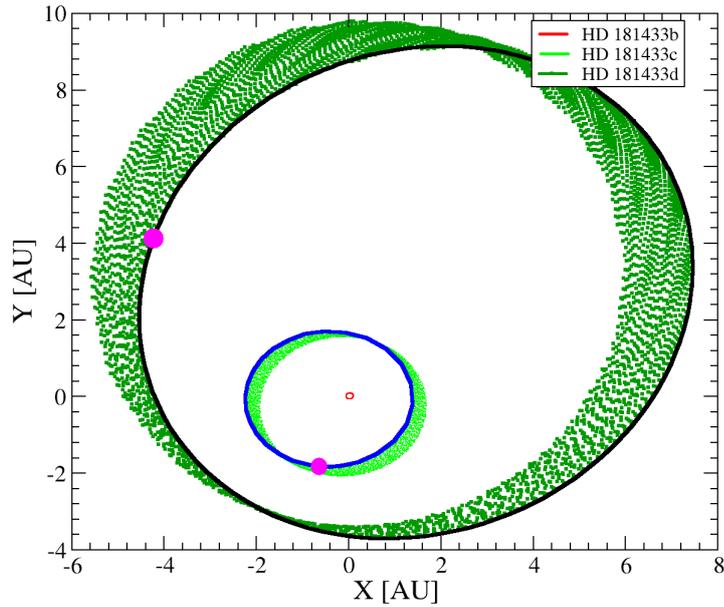


Figura 4.1: Ilustração esquemática do sistema planetário HD 181433, considerando a solução publicada em Horner et al. (2019). As trajetórias de cada corpo foram obtidas a partir de simulações feitas em um intervalo de 5000 anos, considerando um sistema de referência dado em coordenadas canônicas de Jacobi. A estrela central corresponde à posição da origem do plano, ( $X = 0, Y = 0$ ); os círculos lilás indicam as posições iniciais dos planetas mais massivos, segundo dado pela Tabela 4.1, com as linhas largas coloridas indicando um período completo para as suas respectivas trajetórias.

integração em  $T = 5000$  anos, aplicando os valores dados na Tabela 4.1 como condições iniciais. Os resultados estão exibidos em coordenadas retangulares. Vemos que o menor corpo (HD 181433b, destacado em vermelho) encontra-se em uma órbita mais interna, muito próxima da estrela central e bastante afastada dos dois gigantes externos, que descrevem órbitas de raios muito maiores. No mesmo painel, realçamos em azul e preto um período orbital completo dos dois planetas externos.

É possível mostrar que o modelo de quatro corpos pode ser aproximado por um problema mais simples de três corpos, no qual a presença do planeta mais interno é ignorada (Cincotta et al., 2021), sem qualquer perda significativa da informação dinâmica global do sistema. Na realidade, executando algumas simulações numéricas, verificou-se que a presença do corpo menos massivo não é capaz de perturbar significativamente o movimento dos planetas externos. A Figura 4.2 mostra a evolução de semi-eixo e da excentricidade de ambos os planetas mais massivos, HD 181433c e HD 181433d, considerando tanto o modelo completo de 4 corpos (estrela + 3 planetas) quanto o modelo mais simples de 3 corpos (estrela + 2 planetas gigantes), segundo indicado na legenda.

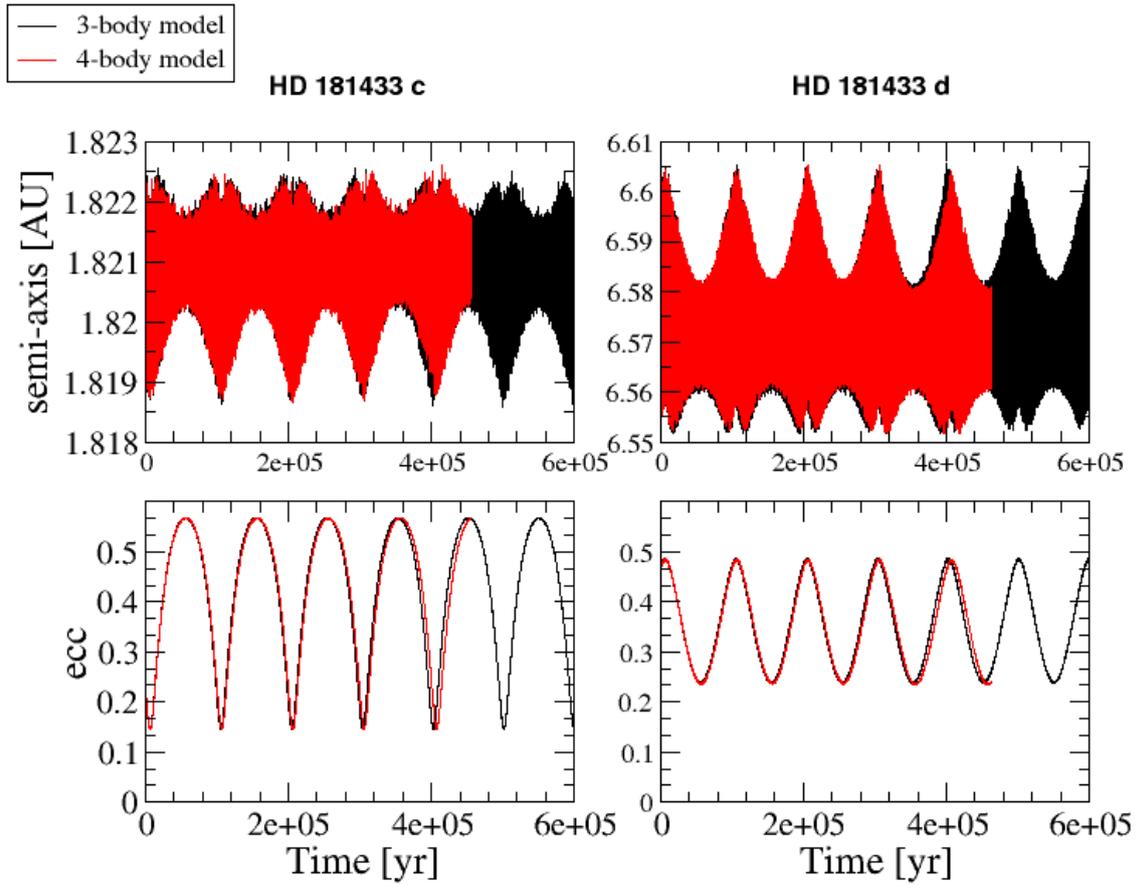


Figura 4.2: Evolução dos semi-eixos maiores e excentricidades para os dois planetas mais massivos do sistema HD 181433, considerando modelos de três e quatro corpos (vide legenda, Cincotta et al. (2021)).

Nota-se que a defasagem entre as curvas preta e vermelha torna-se visualmente notável somente para um tempo de integração  $t \gtrsim 4 \times 10^5$  anos. Nos experimentos em que aplicamos a metodologia da entropia Shannon, os tempos de integração utilizados são da ordem de quatro vezes menores que isso. Fica claro que, no contexto de nossas aplicações, utilizar um sistema mais simples de três corpos é razoável.

Com base nos resultados da Figura 4.2, tomamos o sistema HD 181433 como um problema de três corpos, designando o subscrito 1 para o planeta interno, HD 181433c, e 2 para o planeta externo, HD 181433d. Além disso, no restante deste capítulo, chamaremos A0 a condição nominal do sistema, definida conforme a Tabela 4.1.

A Figura 4.3 apresenta um conjunto de resultados obtidos através de uma integração mais longa de A0, simulada para um tempo  $T = 10^8$  anos. Os dois painéis superiores mostram o comportamento em larga escala dos semi-eixos (esquerda) e das excentricidades (direita), enquanto os dois painéis abaixo mostram a evolução de  $a_2$  (esquerda) e  $e_2$  (direita)

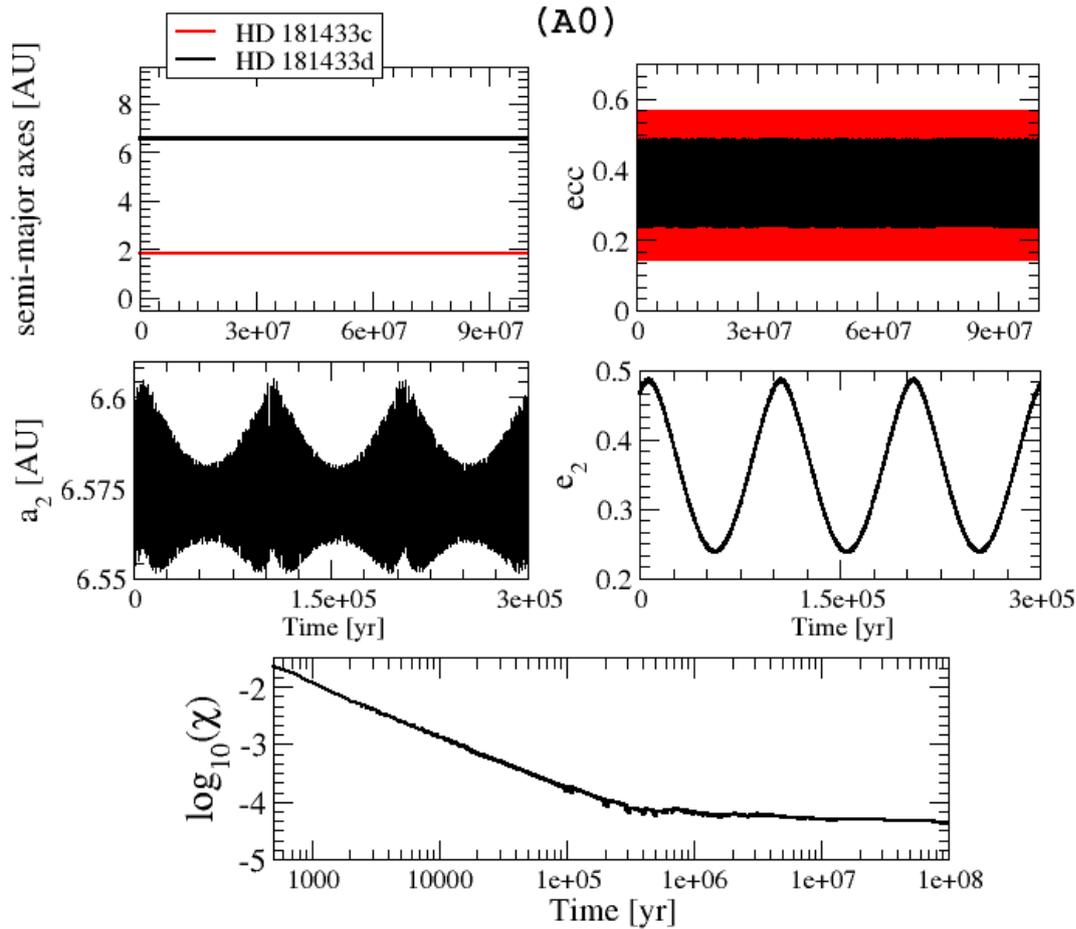


Figura 4.3: Integração de  $10^8$  anos da condição nominal do sistema, considerando os valores orbitais dados da Table 4.1. Vemos a evolução para os semi-eixos e excentricidades nos painéis superiores esquerdo e direito, respectivamente. Ao centro da figura, exibimos a evolução de  $a_2$  (esquerda) e  $e_2$  (direita) para um intervalo mais curto, de  $3 \times 10^5$  anos. O painel inferior apresenta o comportamento da função  $\chi$ , cujo limite assintótico define o LCE da solução.

ao logo dos  $3 \times 10^5$  anos iniciais. O sistema é estável ao longo de  $T = 10^8$  anos, e no painel inferior, vemos que também é caótico. Neste último quadro, apresentamos o comportamento do LCE,  $\chi(t)$ . O eixo  $x$  é dado em escala logarítmica, e assim fica bastante claro o perfil assintótico da curva, que converge para um valor  $\log_{10} \chi(T) \approx -4.3$ , ou seja.,  $\chi \approx 5.0 \times 10^{-5}$  anos $^{-1}$ , implicando em um tempo de Lyapunov  $T_L \sim 2 \times 10^4$  anos, relativamente curto se comparamos com o período secular do sistema, que inferimos ser da ordem de  $10^5$  anos a julgar pelas variações periódicas de  $e_2$ , vistas no painel central direito.

A Figura 4.4 exhibe quatro mapas dinâmicos construídos a partir de simulações numéricas para uma grade de  $100 \times 100 = 10^4$  condições iniciais, tomadas sobre os planos de fase  $(a_2, e_2)$  e  $(a_2, \mathcal{M}_2)$  do sistema HD 181433. Nos quadros superiores, cada condição foi simulada dentro de um intervalo  $T = 10^6$  anos, e as soluções estão parametrizadas por

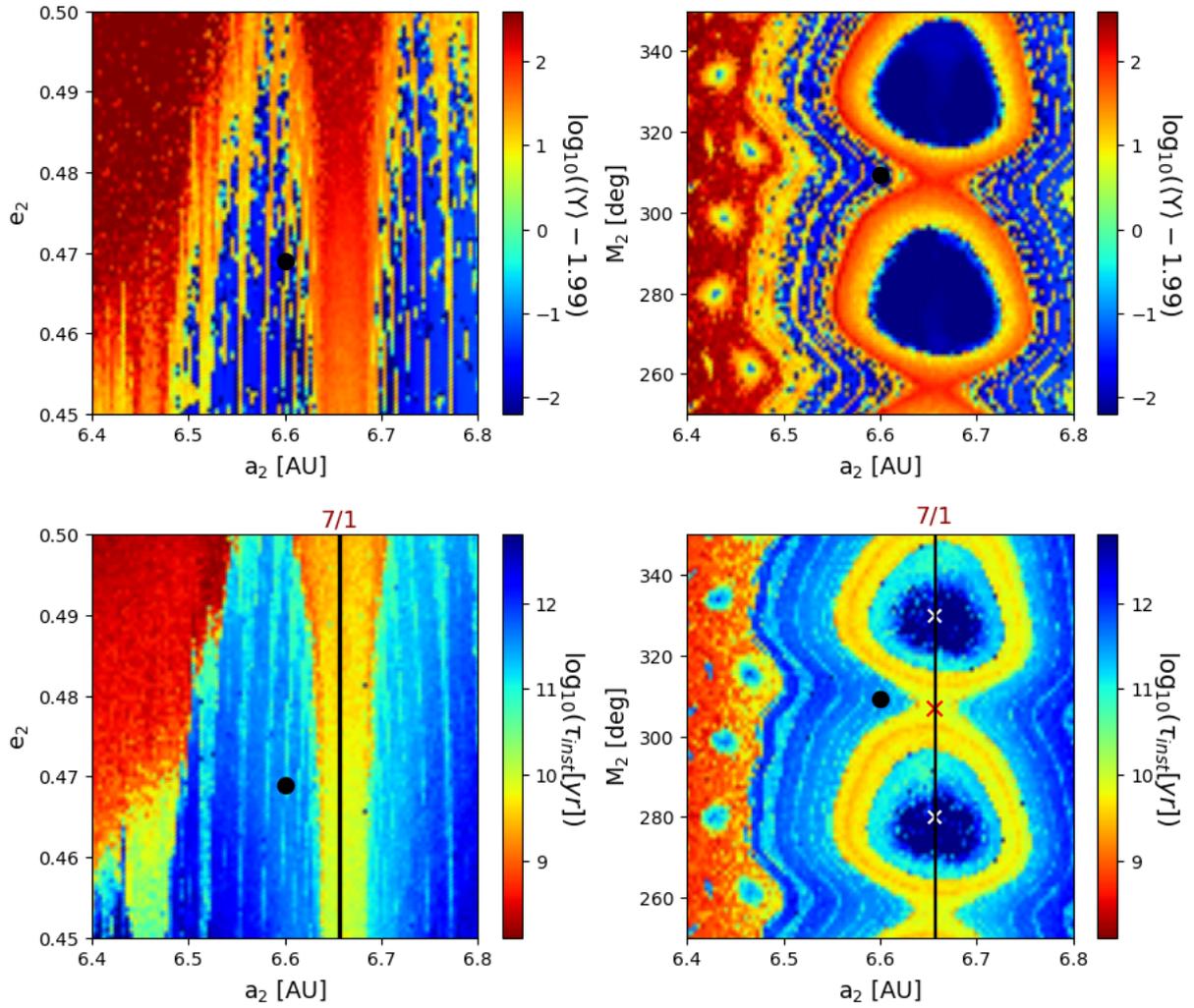


Figura 4.4: Mapas dinâmicos de MEGNO (superior) e  $\tau_{\text{inst}}(S)$  (inferior) construídos para uma grade de  $100 \times 100 = 10^4$  condições iniciais tomadas na vizinhança da posição nominal do sistema HD 181433, sobre os planos  $(a_2, e_2)$ , à esquerda, e  $(a_2, M_2)$ , à direita. Os mapas MEGNO foram obtidos de integrações feitas dentro de  $T = 10^6$  anos; os mapas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  compreendem simulações feitas dentro de um intervalo dez vezes menor. O ponto preto identifica o sistema real (Tabela 4.1), e as linhas pretas indicam a posição nominal da RMM 7:1. Os símbolos de “x” indicam posições de (prováveis) soluções de equilíbrio estáveis (branco) e instáveis (preto) associadas à RMM 7:1 (Alves Silva et al., 2021)

$\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . Os quadros abaixo mostram mapas de tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , obtidos para simulações de  $10^5$  anos. Os pontos pretos identificam a posição nominal do sistema em todos os painéis.

Vemos que o sistema HD 181433 está próximo à comensurabilidade 7:1, destacada pela linha vertical preta nos painéis inferiores. É uma RMM de alta ordem, e a região vizinha ao sistema mostra-se “levemente” caótica, no intervalo  $6.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 6.6 \text{ UA}$  e em  $a_2 > 6.7 \text{ UA}$ . Entretanto, caos mais intenso aparece nos domínios externos à ressonância (Alves Silva et al., 2021), em  $a_2 < 6.5 \text{ UA}$ . Não obstante, uma grande porção da vizinhança próxima de A0 apresenta níveis de difusão lenta, o que se traduz por tempos de instabilidade altos ( $\tau_{\text{inst}} \gtrsim 10^{10}$  anos), conforme é visto nos dois quadros inferiores. Este resultado corrobora o mapa de “tempos de vida” apresentado no trabalho de Horner et al. (2019). Ali, os autores obtiveram os *lifetime maps* através de simulações numéricas em intervalos de integração de até  $10^8$  anos, também considerando condições iniciais no entorno de A0, para o plano  $(a_2, e_2)$ . Uma considerável porção do domínio circunvizinho à posição nominal do sistema foi encontrada como estável dentro do intervalo de 100 milhões de anos.

Nos planos  $(a_2, \mathcal{M}_2)$ , é possível distinguir estruturas típicas de ressonâncias, para  $a_2 \sim 6.65 \text{ UA}$ . Vemos duas ilhas ressonantes que correspondem à soluções de equilíbrio características da RMM 7:1. Marcamos com um “x” branco tais soluções (em  $\mathcal{M}_2 \approx 280$  graus e  $\mathcal{M}_2 \approx 330$  graus), e vemos que elas aparecem dentro de domínios regulares ( $\langle Y \rangle \approx 2$ ), ao menos ao longo dos  $10^6$  anos simulados nos mapas MEGNO. Além disso, os mapas inferiores indicam que tais domínios são caracterizados por instabilidades que se manifestam em largas escalas de tempo ( $\tau_{\text{inst}}(S) > 10^{10}$  anos).

O sistema HD 181433, indicado pelo ponto preto, aparece bastante próximo à interseção entre as ilhas ressonantes, no plano  $(a_2, \mathcal{M}_2)$ , na região  $\mathcal{M}_2 \approx 310$  graus. O encontro entre as ilhas é marcado por uma estrutura com nível estocástico mais caótico ( $10 \lesssim \langle Y \rangle \lesssim 100$ ), quando comparado à porção interna da ressonância, que é mais regular. Provavelmente, constitui um ponto hiperbólico, e está marcado com um “x” preto na figura (Alves Silva et al., 2021). É possível correlacionar este ponto com o forte caos que caracteriza a região ressonante no mapa MEGNO de  $(a_2, e_2)$  ( $6.6 \text{ UA} < a_2 < 6.7 \text{ UA}$ ). A mesma região aparece, no mapa de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , com tempos de instabilidade  $\sim 10^{10}$  anos. Relativamente à posição nominal do sistema, o domínio ressonante apresenta difusão mais rápida das variáveis de fase.

Pode-se notar uma correlação, ao menos visual, entre as estruturas estocásticas mostradas nos mapas superiores, e os níveis de tempos de instabilidade exibidos abaixo, tanto interna quanto externamente à ressonância 7:1. Repare que ainda aparecem estruturas de uma ressonância de alta ordem, mais fraca, na porção esquerda dos mapas, mais facilmente detectável nos planos  $(a_2, \mathcal{M}_2)$ . Neles, vemos pequenas ilhotas de fraco movimento caótico ( $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99) \sim 0$ ), e com altas estimativas para  $\tau_{\text{inst}}(S)$  ( $\sim 10^{11}$  anos).

#### 4.1 Análise de estabilidade: condições iniciais integradas sobre um segmento

Analogamente ao que foi feito para o sistema HD 20003, comparamos as estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  com os tempos de disrupção  $t_{\text{dis}}$  obtidos de integrações diretas das equações de movimento, usando a rotina `Ncorp`. Neste caso, nossa análise estendeu-se às soluções obtidas a partir de um segmento de condições iniciais do sistema HD 181433, tomadas de um intervalo do semi-eixo externo,  $a_2$ , dentro do qual pudessem ser encontradas faixas ressonantes (Cincotta et al., 2021), nas razões 4:1, 5:1 e 6:1. Estudar o comportamento difusivo derivado a partir da entropia Shannon nestes casos significou um interessante teste de verificação do método.

Dessa forma, nosso experimento consistiu em dois momentos: primeiro, simulamos as condições usando integrações diretas, por um intervalo máximo de  $10^9$  anos. Os resultados aparecem marcados pelos quadrados brancos na Figura 4.5, totalizando 374 condições tomadas no intervalo  $4.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 6.5 \text{ UA}$  (Alves Silva et al., 2021). Aquelas trajetórias que não resultaram em disrupções do sistema aparecem com  $t_{\text{dis}} = 10^9$  anos.

No mesmo painel da Figura 4.5, mostramos os resultados para o segundo experimento, no qual tomou-se um total de  $10^4$  condições iniciais do intervalo  $4.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 7.0 \text{ UA}$ , mantendo-se os demais parâmetros orbitais fixos aos valores dados pela Tabela 4.1. Aplicando simulações de  $10^5$  anos, computamos a entropia Shannon  $S$ , e a partir dela, calculamos a difusividade  $D_S$  e derivamos os tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$  respectivos. Os resultados aparecem na forma de triângulos verdes da figura, e neste caso, definimos o valor  $10^{10}$  anos como o *cut off* das estimativas (isto é, o máximo valor admitido para  $\tau_{\text{inst}}(S)$ ).

As linhas pretas localizam as RMMs presentes no dado intervalo, e na parte superior

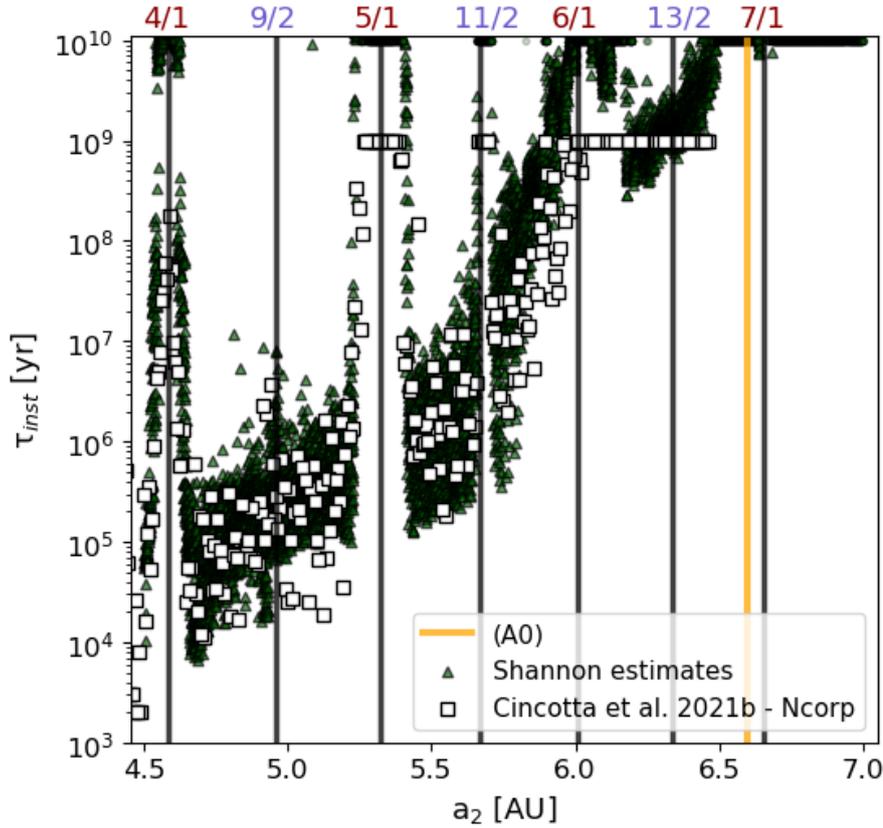


Figura 4.5: Distribuição dos tempos de instabilidade  $\tau_{inst}(S)$  para um conjunto de  $10^4$  condições iniciais tomadas no intervalo  $4.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 7.0 \text{ UA}$ . As linhas pretas indicam a posição das ressonâncias principais identificadas nesse intervalo, e a linha amarela destaca a posição nominal do sistema HD 181433. Os quadrados brancos representam os tempos de ruptura  $t_{dis}$  conforme obtidos através de simulações diretas, posteriormente publicados em Cincotta et al. (2021).

da figura, estão identificadas as respectivas razões  $n_1/n_2$ . A linha amarela indica a posição nominal do sistema, bem próxima à RMM 7:1. Analisando as distribuições de pontos brancos e verdes, percebe-se uma correlação entre os picos de estabilidade, para os quais  $t_{dis} = 10^9$  anos e  $\tau_{inst}(S) = 10^{10}$  anos, e as regiões ressonantes, majoritariamente nos casos das razões  $k/1$  ( $k$  inteiro maior que 1), mas que também ocorre no caso da RMM 11:2. As duas distribuições mostram acordo razoável nesse aspecto, e fica claro que essas ressonâncias configuram regimes de difusão lenta das variáveis de ação, comparativamente aos domínios vizinhos, externos às ressonâncias. Neste caso, o que vemos são casos de ressonâncias atuando como mecanismo de proteção suficientemente longa, a escalas de tempos comparáveis à idade da estrela central (Trevisan et al., 2011).

Na Figura 4.6, mostramos 1000 condições iniciais integradas em  $T = 10^5$  anos, dentro do mesmo intervalo considerado no painel 4.5. Agora, o perfil de estabilidade e difusão

mostrado no quadro da Figura 4.5 pode ser comparado com o comportamento estocástico e as amplitudes de variação  $\mathcal{A}(e_2)$  da excentricidade  $e_2$  de cada solução. O painel superior mostra os valores obtidos para o indicador MEGNO  $\langle Y \rangle$ , adotando-se o valor de corte  $\langle Y \rangle_{\text{cut}} = 200$  para as trajetórias altamente caóticas e/ou instáveis dentro do tempo de integração. A linha tracejada azul indica  $\langle Y \rangle = 2$ , limite para o qual as órbitas são regulares. O quadro de baixo apresenta os valores obtidos para a máxima variação de  $e_2$ . Os símbolos vermelhos indicam condições instáveis em  $t < 10^5$  anos. Em ambos os quadros, as linhas pretas marcam novamente a localização das principais ressonâncias, e em amarelo a posição nominal do sistema.

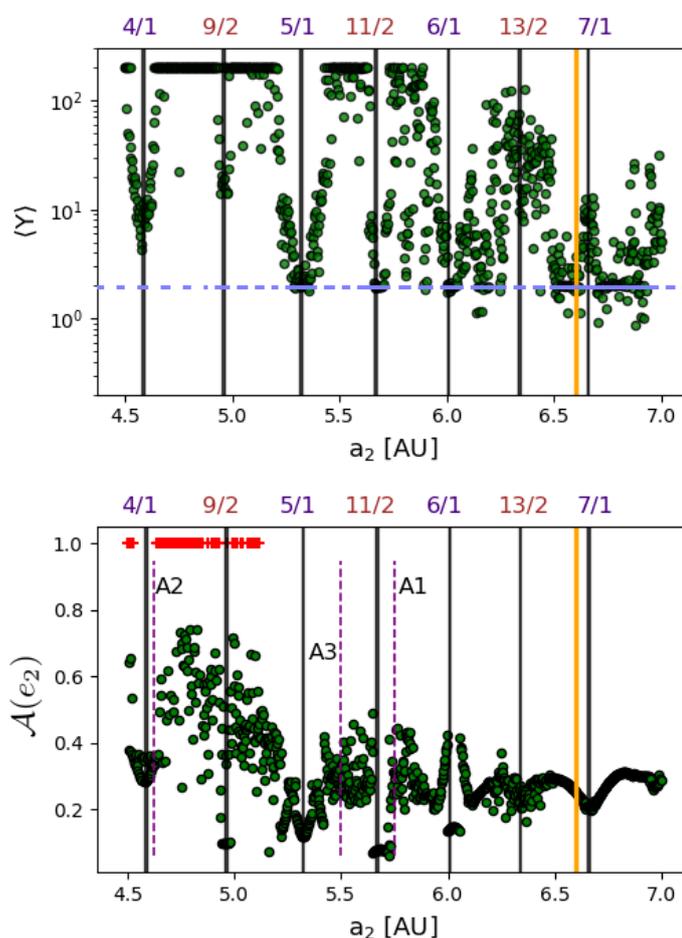


Figura 4.6: *Superior*: distribuição dos valores de  $\langle Y \rangle$ , em escala logarítmica, para um conjunto de 1000 condições iniciais tomadas dentro do intervalo  $4.5 \text{ UA} \leq a_2 \leq 7.0 \text{ UA}$ . *Inferior*: para o mesmo conjunto de soluções, mostramos as amplitudes máximas de variação da excentricidade  $e_2$ . As linhas verticais escuras indicam as posições nominais de ressonâncias presentes, devidamente identificadas no alto da figura. A linha amarela denota a posição real do sistema HD 181433, vizinha à RMM 7:1. Cruzes vermelhas indicam condições instáveis em  $t < 10^5$  anos.

O ponto a ser destacado está novamente nas faixas ressonantes. Já havíamos visto

que elas definem regiões de estabilidade mais longa, tanto pelas simulações diretas quanto usando a entropia Shannon. O que inferimos, a partir dos pontos verdes da Figura 4.5, é que as ressonâncias (4:1, 5:1, 11:2, 6:1 e 7:1) são caracterizadas por difusão lenta e alta estabilidade. Por outro lado, os quadros da Figura 4.6 mostram que essas regiões exibem (i) soluções de caos mais fraco, com a vizinhança próxima apresentando  $\langle Y \rangle < 10$  em  $T = 10^5$  anos (em uma estimativa rápida, isto implica  $\chi(T) \sim 0.0002 \text{ ano}^{-1}$ , a solução coincidente à posição nominal da ressonância sendo regular,  $\langle Y \rangle \approx 2$ ); e (ii) mínimos locais de variação de  $e_2$ , com  $\mathcal{A}(e_2) \leq 0.3$ .

Neste aspecto, há uma correlação entre a estabilidade das soluções e seu comportamento menos caótico, com excitações mais fracas de  $e_2$  e, portanto, difusão mais lenta sobre o plano de fase. Em contrapartida, as regiões não-ressonantes mostram uma aparente dispersão no comportamento de condições adjacentes, observada tanto nas escalas de tempos de instabilidade da Figura 4.5, quanto no painel de amplitudes  $\mathcal{A}(e_2)$  da Figura 4.6. Essa dispersão aparece mais evidente em determinadas regiões (por exemplo, na faixa entre as ressonâncias 4:1 e 9:2, e entre as ressonâncias 5:1 e 11:2). Nota-se, ao observar a Figura 4.5, que há ocasiões em que condições que estão bastante próximas entre si chegam a apresentar uma diferença de até duas ordens de grandeza entre os respectivos valores obtidos para  $t_{\text{dis}}$ , por exemplo. Nos mesmos intervalos, ao analisar o quadro superior da Figura 4.6, observa-se justamente os casos de caos mais forte dentre o conjunto de soluções.

Selecionamos três condições específicas dentro do domínio considerado, e que estão destacadas no painel inferior da Figura 4.6 pelas linhas tracejadas roxas, identificadas como A1, A2 e A3. Os respectivos valores iniciais de  $a_2$  e  $e_2$  de cada uma delas estão definidos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Valores iniciais do semi-eixo  $a_2$  e da excentricidade  $e_2$  para condições singulares do plano de condições iniciais do sistema HD 181433.

	<b>A1</b>	<b>A2</b>	<b>A3</b>
Semi-eixo [UA]	5.75	4.62	5.50
Excentricidade	0.469	0.469	0.469

#### 4.1.1 A dispersão local de condições iniciais próximas: $t_{\text{dis}}$ contra $\tau_{\text{inst}}(S)$

Agora, exploramos o comportamento das condições iniciais A1, A2 e A3, considerando um conjunto de soluções muito próximas. Queremos verificar aqui se existe uma dispersão

local, isto é, uma diferença quantitativa entre tempos de disrupção de condições vizinhas, e se essa diferença é intrínseca ao problema.

Na Figura 4.7, os painéis superiores mostram a evolução do semi-eixo maior  $a_2$  para as condições iniciais A1, A2 e A3, definidas na Tabela 4.2. De uma forma geral, o cenário de cada uma dessas soluções é o seguinte: A1 e A3 estão localizadas entre regiões ressonantes, intercalando comensurabilidades de ordens distintas; A2, por outro lado, está “colada” à ressonância 4:1.

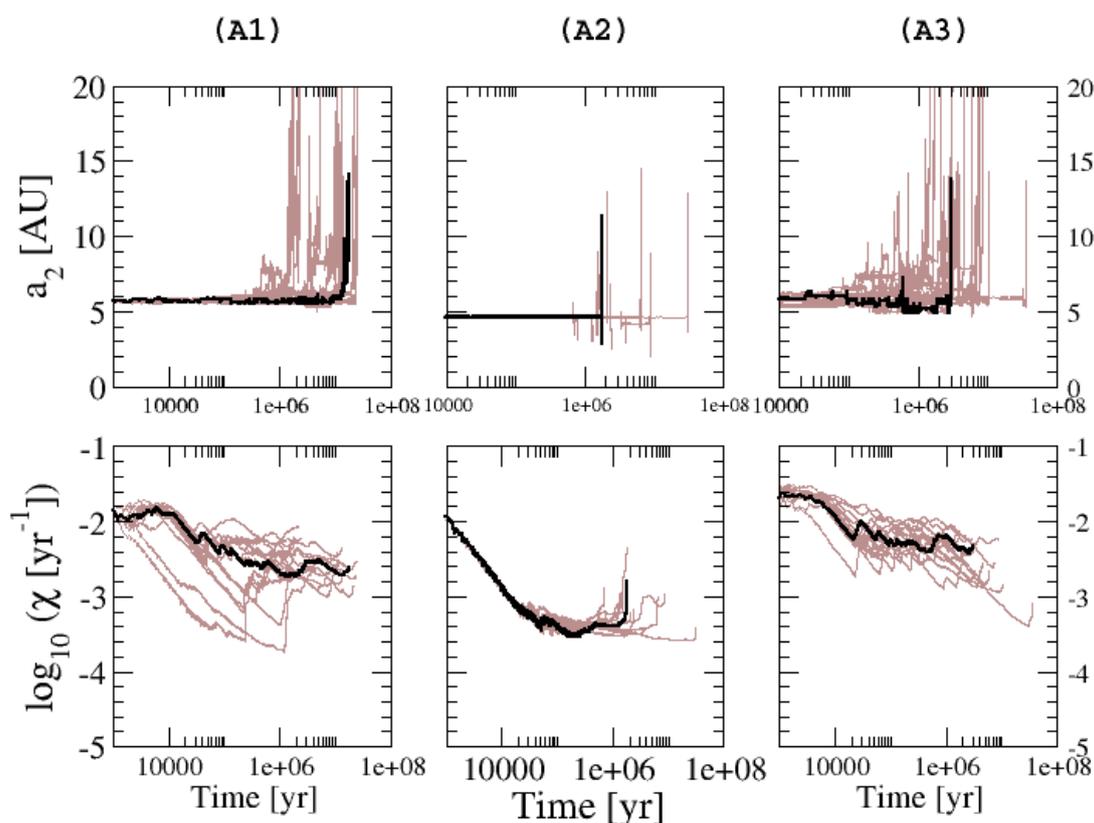


Figura 4.7: (Painéis superiores) Evolução temporal do semi-eixo  $a_2$  para as condições A1, A2 e A3, obtidas como soluções numéricas integradas com o código `Ncorp`. Cada painel apresenta um conjunto de soluções (curvas marrons) nas quais um pequeno desvio inicial foi tomado ao redor da respectiva condição nominal (curva preta). (Painéis inferiores) Resultados do cálculo numérico da função  $\chi(t)$ .

Para os três casos, consideramos integrações diretas, aplicando a rotina `Ncorp`. Cada quadro da Figura 4.7 apresenta conjuntos de simulações nas quais foram tomados pequenos desvios em relação aos valores nominais da Tabela 4.2. Esses desvios consistiram em valores de  $(\delta a, \delta e)$ , tomados dentro do intervalo  $[10^{-5}, 10^{-3}]$ , de tal modo que fossem integradas

condições iniciais  $(a_2 \pm \delta a, e_2 \pm \delta e)$ . As soluções estão plotadas em cor marrom claro nos quadros da Figura 4.7. As curvas pretas representam as respectivas soluções nominais (Tabela 4.2), para as quais  $\delta a$  e  $\delta e$  são nulos. Nos painéis inferiores, estão graficadas as curvas com o comportamento da função  $\chi(t)$ , cujo limite define o expoente de Lyapunov, computada para cada uma das soluções mostradas nos quadros superiores.

As três condições iniciais mostraram-se instáveis em tempos inferiores à  $10^8$  anos. Além disso, em determinados casos, vemos uma dispersão em torno de duas ordens de grandeza entre os tempos de disrupção obtidos. A condição inicial A1, por exemplo, que se encontra próxima a ressonância 11:2, apresenta a dispersão mais amena, com a grande maioria das simulações apontando  $t_{\text{dis}} \sim 10^7$  anos. Já A2 e A3, por outro lado, mostram uma dispersão maior. Independentemente da condição considerada, em todos os casos, o cálculo de  $\chi$  indicou uma alta caoticidade das soluções, com tempos de Lyapunov nunca superiores a  $\sim 5000$  anos.

Conduzimos um novo experimento numérico, comparando os valores de  $t_{\text{dis}}$  dados por simulações diretas com as estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  obtidas da entropia Shannon. Integramos um conjunto de condições iniciais igualmente distribuídas ao redor dos valores nominais de A1, A2 e A3 (Tabela 4.2), dentro de uma grade retangular de tamanho  $[-\delta, \delta] \equiv [-10^{-3}, 10^{-3}]$  tomada sobre o plano  $(a_2, e_2)$ . Aqui,  $\delta$  representa aproximadamente o mínimo valor do intervalo de incerteza dos semi-eixos e excentricidades, conforme mostrado na Tabela 4.1.

Enquanto as integrações diretas foram simuladas por um intervalo máximo de  $10^9$  anos, as estimativas feitas com a entropia Shannon levaram  $10^5$  anos.

Os diagrams de correlação  $(t_{\text{dis}}, \tau_{\text{inst}}(S))$ , contendo os resultados obtidos para cada experimento, estão exibidos nos painéis da Figura 4.8. Há um acordo razoável para o caso da condição A1: embora a dispersão seja maior nas estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , ambas as distribuições mostram uma concentração mais intensa de pontos em escalas de tempo  $\sim 10^7$  anos.

Para A3, vemos o contrário: a dispersão é maior para  $t_{\text{dis}}$ , com uma solução inclusive atingindo  $t_{\text{dis}} > 10^8$  anos. Não obstante, a maior parte dos dados está concentrada, aproximadamente, no intervalo  $t_{\text{dis}} \in [3 \times 10^5, 2 \times 10^7]$  anos, e  $\tau_{\text{inst}}(S) \in [4 \times 10^4, 2 \times 10^6]$  anos (Alves Silva et al., 2021).

Por outro lado, um comportamento curioso ocorre no caso de A2. Primeiro, é vista

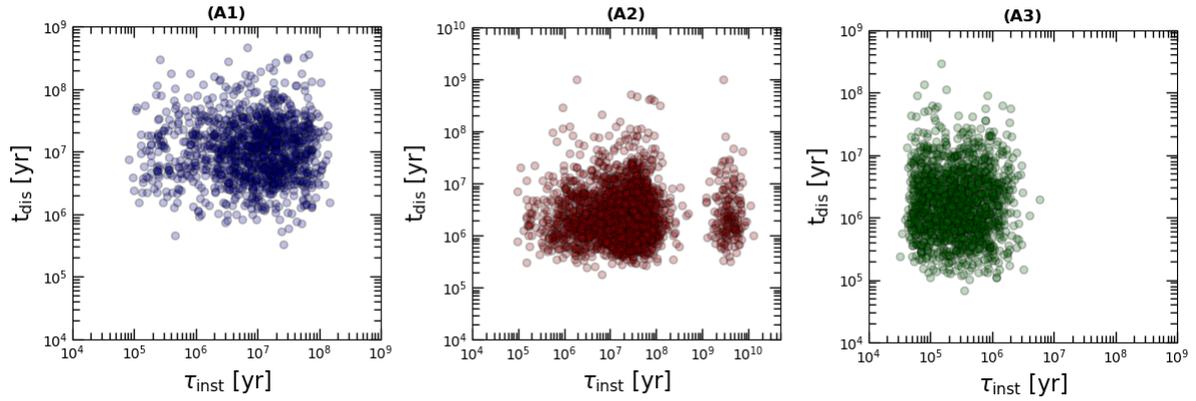


Figura 4.8: Diagramas de correlação entre as estimativas de tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e os tempos de ruptura  $t_{\text{dis}}$  advindos de integrações diretas (Alves Silva et al., 2021). Os conjuntos de dados foram obtidos a partir de simulações de condições iniciais construídas em intervalos “infinitesimais” ao redor das posições nominais de A1, A2 e A3.

Tabela 4.3 - Valores esperados  $\mu$  e desvios padrões  $\sigma$  obtidos para as distribuições de  $t_{\text{dis}}$  e  $\tau_{\text{inst}}$ , todos computados considerando uma distribuição log-normal dos tempos de ruptura/instabilidade (Rice et al., 2018; Hussain e Tamayo, 2020; Alves Silva et al., 2021).

Cond. inicial - Método	# Amostragem	$\mu$ ( $\log_{10} t[\text{yr}]$ )	$\sigma$
A1 - direto	1225	7.0	0.5
A1 - Shannon	1225	6.9	0.7
A2 - direto	2500	6.2	0.5
A2 - Shannon	2500	7.3	0.9
A3 - direto	1600	6.2	0.5
A3 - Shannon	1600	5.4	0.4

uma dispersão mais alta dos resultados, principalmente para o caso de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Além disso, tais estimativas exibem uma distribuição bimodal, com duas “nuvens” de pontos concentradas em faixas diferentes da escala de tempo. De uma maneira geral, considerando os dois conjuntos de dados, os pontos se concentram em torno de  $\sim 10^6$  anos, no eixo das ordenadas, e ao redor de  $10^7$  anos nas abcissas.

Na Tabelas 4.3, apresentamos uma estatística geral de nossos resultados. Exibimos os valores para os tempos esperados (médias)  $\mu$  e os respectivos desvios  $\sigma$  de cada distribuição. Como as distribuições são dadas em escalas logarítmicas, assim também  $\sigma$  e  $\mu$  foram calculados considerando distribuições log-normal (Alves Silva et al., 2021).

Nos casos de A1 e A3, está claro que as médias para  $\tau_{\text{inst}}(S)$  estão subestimadas em relação às integrações diretas. Para A2, vemos o contrário, e notamos inclusive que o respectivo  $\sigma_{(\text{Shannon})}$  é maior, neste caso. Contudo, em todos os experimentos as diferenças

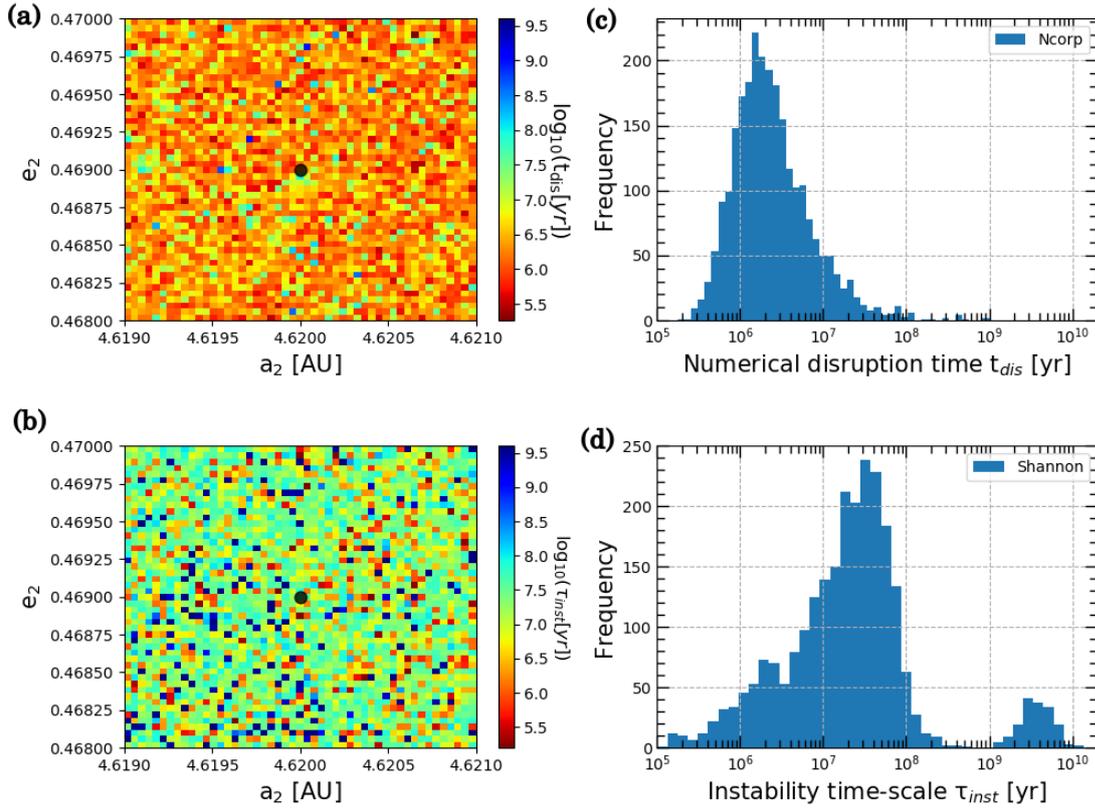


Figura 4.9: (a) Mapa dinâmico dos tempos de ruptura ( $t_{\text{dis}}$ ) gerados das 2500 soluções para A2, mostradas no painel central da Figura 4.8. O ponto preto ao centro indica a posição nominal da condição A2 (Tabela 4.2). (b) Mapa dinâmico dos tempos de instabilidade ( $\tau_{\text{inst}}(S)$ ), também advindos das 2500 simulações mostradas no painel do meio da Figura 4.8. (c) Histograma relativo aos resultados do mapa exibido em (a). (d) Histograma relativo aos resultados do mapa exibido em (b).

das médias é de, no máximo, uma ordem de magnitude.

Na Figura 4.9, o conjunto das 2500 soluções que fornecem o  $t_{\text{dis}}$  e o  $\tau_{\text{inst}}(S)$  de A2 estão apresentados na forma de mapas dinâmicos (quadros à esquerda) parametrizados pelas respectivas escalas de tempo consideradas, e de seus respectivos histogramas (quadros à direita). Na parte superior, são mostrados os resultados das integrações diretas, e abaixo, as estimativas feitas através da entropia Shannon. O ponto preto ao centro dos mapas denota a posição nominal de A2.

#### 4.1.2 Separatriz e difusão anômala

Olhando o quadro central da Figura 4.8 juntamente com os histogramas mostrados na Figura 4.9, a pergunta que surge é o que tal distribuição indica a respeito da dinâmica particular da condição A2. Considerando a posição nominal de A2 (Tabela 4.2), e analisando os quadros das Figuras 4.5 e 4.6, vemos que ela aparece imersa na região que transita

entre o domínio interno e externo da RMM 4:1, justamente no que poderia constituir a vizinhança da separatriz dessa ressonância. Nota-se que se trata de uma região cercada por forte caos e condições que se tornam disruptivas em  $t < 10^5$  anos, como mostram as cruces vermelhas no quadro inferior de 4.7. Ao mesmo tempo, conforme caminha-se para dentro do centro da ressonância, o caos se torna mais ameno, embora ainda presente, mas a difusão no espaço das ações é certamente mais lenta, e os tempos de instabilidade tornam-se mais longos (Cincotta et al., 2021; Alves Silva et al., 2021).

A hipótese de proximidade à separatriz pôde ser averiguada através da construção dos mapas dinâmicos apresentados na Figura 4.10, nos quais uma grade de  $100 \times 100 = 10^4$  condições iniciais da vizinhança de A2 foram integradas, considerando os planos  $(a_2, e_2)$ , apresentados na parte superior, e  $(a_2, \mathcal{M}_2)$ , na parte inferior. Cada integração durou o tempo limite de  $10^5$  anos, a menos dos casos em que a instabilidade se manifestou antes. Neste caso, as respectivas condições instáveis estão indicadas pelos pontos marrons. Em cada gráfico, o ponto preto indica a posição nominal da condição A2.

Os quadros (a), (b), (c) e (d) da Figura 4.10 exibem comportamentos similares. Em (a) e (b), os resultados estão parametrizados pelo logaritmo do MEGNO reescalado, e a emergência de comportamentos caóticos correlaciona-se diretamente com as estruturas de variação da amplitude da excentricidade,  $\mathcal{A}(e_2)$ , mostradas nos mapas (c) e (d): ali, altos níveis de caos implicam altas amplitudes de variação de  $e_2$ . Na vizinhança próxima à comensurabilidade, em valores de  $e_2 \sim 0.4$ , aparecem estruturas mais regulares, ou de caos mais ameno. Nos painéis inferiores, marcamos com um “x” as soluções de equilíbrio, em  $\mathcal{M}_2 \approx 299$  graus, que aparecem dentro da ilha ressonante associada à comensurabilidade 4:1.

Nos painéis (e) e (f), apresentamos mapas de tempos de instabilidade obtidos com a abordagem de entropia Shannon. De maneira geral, as estimativas revelam altos valores de  $\tau_{\text{inst}}(S) (\gtrsim 10^9$  anos), e quanto mais nos aproximamos da posição nominal da ressonância, destacada nos quadros inferiores com linhas verticais pretas, mais longos se tornam os tempos estimados, ainda que sejam regiões caóticas, conforme mostrado nos plots (a) e (b). Além disso, todos os mapas, de (a) a (f), apontam para o fato de que a dinâmica global dessa região é bastante afetada pelo valor de fase inicial de  $\mathcal{M}_2$ . As ilha ressonante é estável na extensão que vai de  $\sim 290$  graus a  $\sim 310$  graus, cercada por um mar estocástico de caos destrutivo, no qual o sistema “rompe-se” em tempos  $t \ll 10^5$  anos.

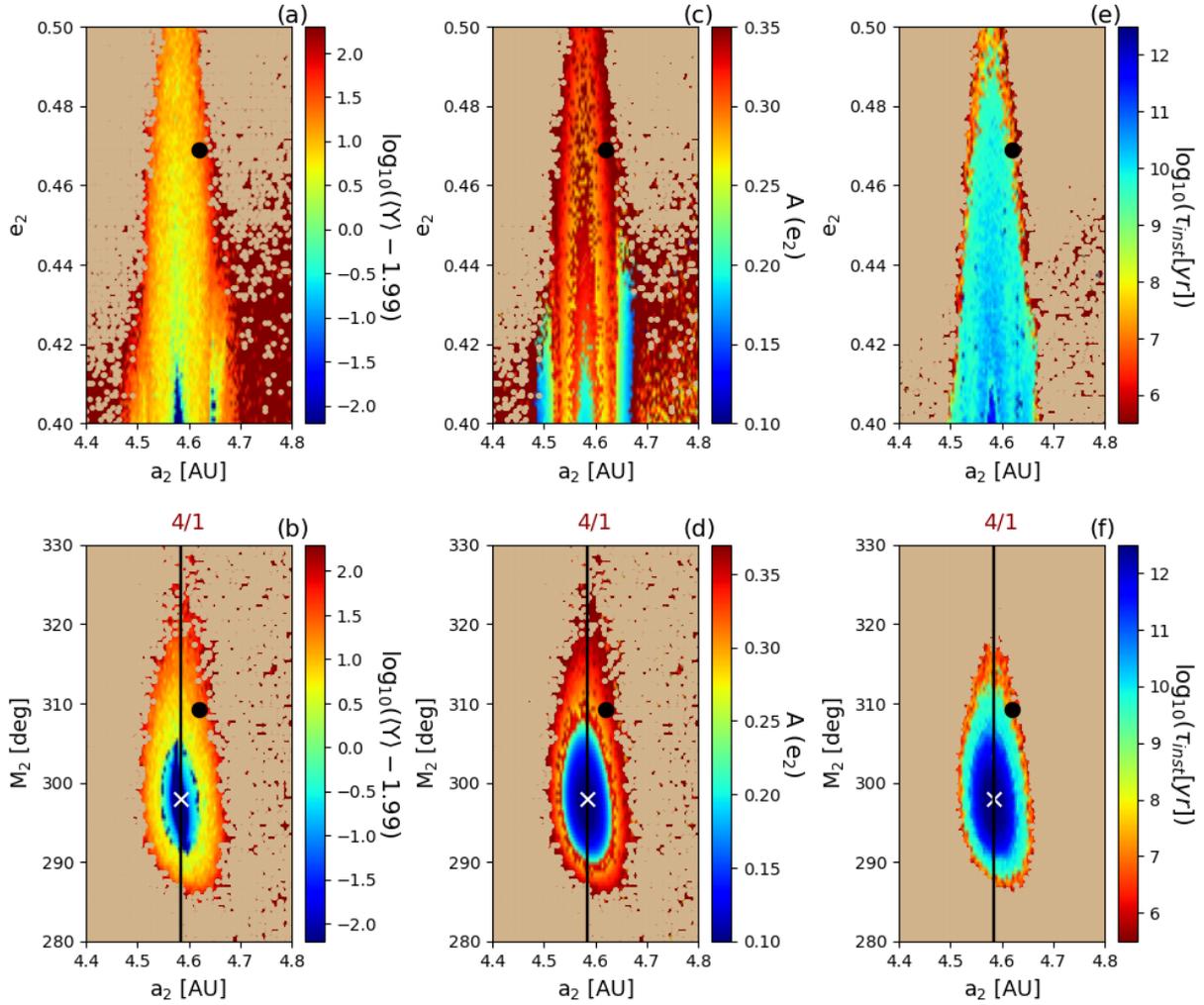


Figura 4.10: Mapas dinâmicos construídos nos espaços de fase  $(a_2, e_2)$  (superior) e  $(a_2, \mathcal{M}_2)$  (inferior), obtidos a partir de simulações numéricas de  $10^4$  condições iniciais tomadas sobre os intervalos mostrados, computadas em  $T = 10^5$  anos: os passo das grades foram definidos em 0.004 ua para  $a_2$ , 0.001 em  $e_2$  e 0.5 graus em  $\mathcal{M}_2$ . (a)-(b) mapas MEGNO parametrizados por  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . (c)-(d) mapa de estrutura de  $\Delta e_2$ . (e)-(f) mapas de  $\tau_{\text{inst}}$  derivaods a partir das medidas de difusão  $D_S$  obtidas da entropia Shannon  $S$ . Os pontos pretos indicam a posição nominal da condição fictícia A2. As linhas verticais pretas denotam a posição exata da RMM 4:1. Marcadores em cor branca, nos mapas inferiores, indicam as soluções de equilíbrio da ressonância 4:1.

Comportamentos dinâmicos mais complexos devem ser esperados nas bordas de domínios ressonantes. Nessas regiões, a parte perturbadora do Hamiltoniano, composta por uma superposição de infinitos termos com diferentes argumentos, nenhum de forte dominância, é responsável por produzir camadas estocásticas na vizinhança da separatriz. Por outro lado, a existência de uma ressonância mais forte, em geral de baixa ordem, nas proximidades, é capaz de contribuir para a manutenção da alta estabilidade, agindo como um mecanismo de proteção em vista do caos externo. É o que se observa comparando os quadros (a) e (b), (e) e (f), da Figura 4.9. Tal situação pode ser esperada nas bordas das ressonâncias mais fortes, conforme se nota através dos picos de altos tempos de ruptura/instabilidade vistos na Figura 4.5, nos casos das RMMs 4:1, 5:1, 11:2 e 6:1.

Configurações nas quais longa estabilidade coexiste com alta estocasticidade tendem a não ser bem descritas seguindo uma teoria de difusão do tipo normal (movimento Browniano), mas podem aproximar-se, em vez disso, de comportamentos de transporte difusivo anômalo, como ocorre no caso dos fenômenos de *stickiness* (Tsiganis et al., 2000). Ao mesmo tempo, conforme caminhamos a altos valores de  $e_2$ , e para fora da RMM 4:1, no plano de fase  $(a_2, e_2)$  da Figura 4.10, a ocorrência de superposições (*overlaps*) com ressonâncias de altas ordens é uma possibilidade plausível.



## Gliese 876

O sistema planetário Gliese 876, também conhecido como GJ 876 ou GL 876, tem sido alvo de estudos nas ciências exoplanetárias há pelo menos três décadas, e uma vasta quantidade de trabalhos abordando este objeto é facilmente encontrada na literatura. O primeiro planeta do sistema, GJ 876b, foi descoberto ainda no começo da era de observações dos planetas extra-solares (Marcy et al., 1998; Delfosse et al., 1998). Trata-se de um gigante gasoso do tipo *warm Jupiter*, com quase o dobro da massa do gigante joviano. O segundo corpo observado, GJ 876c, foi detectado alguns anos mais tarde (Marcy et al., 2001), e é também um gigante gasoso *warm*, com uma massa estimada em cerca de  $0.72 M_{\text{Jup}}$ . Historicamente, “b” e “c” constituíram o primeiro par planetário observado em uma configuração ressonante, neste caso localizado muito próximo à razão 2:1. Estes planetas possuem períodos orbitais curtos, de cerca de 30 dias (GJ 876c) e 60 dias (GJ 876b).

Anos mais tarde, novas observações conduziram ao descobrimento de um terceiro (Rivera et al., 2005) e quarto (Rivera et al., 2010) planetas, GJ 876d e GJ 876e, respectivamente. O primeiro é uma super-Terra de órbita extremamente curta, com período orbital estimado em  $\sim 2$  dias. O segundo, mais externo a todos os demais, tem massa próxima à de Netuno, e um período mais longo ( $\sim 125$  dias). O trabalho de Rivera et al. (2010) indicou que GJ 876e poderia estar inserido em uma provável cadeia de ressonâncias em conjunto com os corpos mais massivos do sistema, GJ 876b e GJ 876c, constituindo um fenômeno conhecido na literatura como ressonância de Laplace, remanescente da dinâmica das luas Io, Europa e Ganímedes, satélites naturais do planeta Júpiter (Sinclair, 1975). Mais além, Rivera et al. (2010) argumentou que é possivelmente esta configuração de dupla ressonância entre os pares planetários (“c” – “b” e “b” – “e”) que contribui para a manutenção da larga estabilidade do sistema a tempos comparáveis à idade estimada da estrela, da ordem de

Tabela 5.1 - Solução de quatro planetas para o sistema GJ 876, conforme obtida por Millholland et al. (2018), considerando a massa estelar  $m_0 \approx 0.37 M_\odot$  (Nelson et al., 2016). Os elementos orbitais são osculadores, e dados em um sistema de coordenadas de Jacobi.

Parâmetro	GJ 876 d	GJ 876 c	GJ 876 b	GJ 876 e
$m [M_\oplus]$	$7.55 \pm_{0.23}^{0.23}$	$265.6 \pm_{2.7}^{2.7}$	$845.20 \pm_{9.4}^{9.5}$	$15.8 \pm_{1.7}^{1.7}$
$a [\text{UA}]$	$0.021838 \pm_{0.00000065}^{0.00000063}$	$0.136044 \pm_{0.000022}^{0.000021}$	$0.218627 \pm_{0.000017}^{0.000017}$	$0.350100 \pm_{0.0012}^{0.0013}$
$e$	$0.0057 \pm_{0.0039}^{0.039}$	$0.25710 \pm_{0.0019}^{0.0019}$	$0.03250 \pm_{0.0017}^{0.0016}$	$0.03000 \pm_{0.024}^{0.023}$
$P [\text{dia}]$	$1.937793 \pm_{0.000008}^{0.000008}$	$30.0972 \pm_{0.0073}^{0.0071}$	$61.1057 \pm_{0.0074}^{0.0074}$	$123.83 \pm_{0.66}^{0.70}$
$\mathcal{M} [\text{grau}]$	$104.0 \pm_{46.9}^{46.7}$	$292.55 \pm_{0.99}^{1.00}$	$340.6 \pm_{4.0}^{4.3}$	$50.3 \pm_{86.8}^{46.0}$
$\omega [\text{grau}]$	$116.0 \pm_{46.7}^{47.3}$	$51.09 \pm_{0.78}^{0.77}$	$35.5 \pm_{4.4}^{4.1}$	$164.1 \pm_{51.4}^{90.1}$

alguns Giga-anos.<sup>1</sup>

A contínua observação desse sistema possibilitou, ao longo da última década, o acúmulo de novos dados e, por consequência, o desenvolvimento de trabalhos nos quais os parâmetros orbitais do cada corpo puderam ser determinados com melhor precisão (Baluev, 2011; Martí et al., 2013; Batygin et al., 2015; Nelson et al., 2016; Millholland et al., 2018). Não obstante, a hipótese da ressonância de Laplace entre o trio planetário “c” – “b” – “e” foi reforçada por tais publicações. Na Tabela 5.1, exibimos os valores para as massas planetárias e os elementos orbitais de cada planeta, de acordo com Millholland et al. (2018), trabalho mais recente que se ocupou em derivar e analisar uma nova solução orbital para o sistema GJ 876. Os elementos orbitais estão dados em um referencial construído com coordenadas de Jacobi.

Na Figura 5.1, é mostrada uma ilustração esquemática das quatro órbitas planetárias, conforme obtida de uma integração para o problema completo, feita com o código computacional *Ncorp* (Beaugé e Cincotta, 2019; Alves Silva et al., 2021). A simulação foi construída para um intervalo de 500 anos (quantidade que representa cerca de  $9.4 \times 10^4$  períodos orbitais do planeta “d”) a um tempo de amostragem  $h = 0.01$  ano. No painel apresentado, o ponto vermelho representa a estrela central; os círculos verdes determinam as posições iniciais de cada planeta, segundo os dados da Tabela 5.1. As linhas coloridas destacam um período completo para cada trajetória. Os pequenos pontos pretos representam os resultados da integração, a cada passo de saída de 0.01 ano.

<sup>1</sup> Em Rivera et al. (2010), menciona-se que a idade estelar supera a casa de 1 Giga-ano. Já Correia et al. (2010) afirma que, levando em consideração os dados de período rotacional e de atividade magnética da estrela, a idade de GJ 876 estaria (aproximadamente) contida no intervalo 0.1 – 5 Giga-anos.

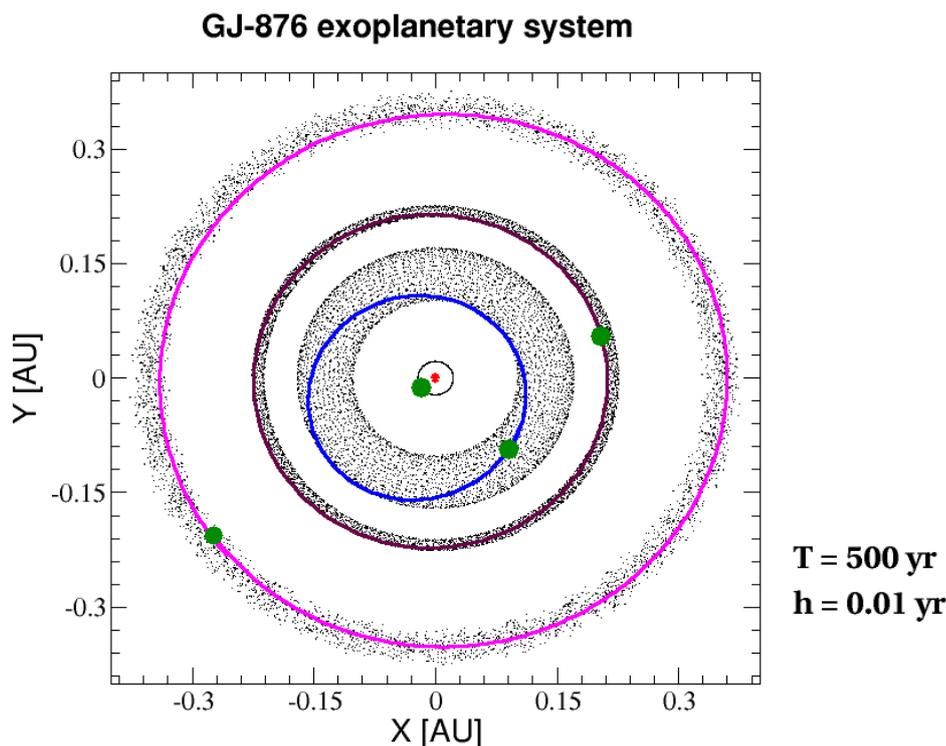


Figura 5.1: Ilustração esquemática do modelo de quatro planetas para o sistema Gliese 876, considerando a solução obtida por Millholland et al. (2018). As trajetórias de cada corpo foram obtidas a partir de simulações feitas para 500 anos, considerando um sistema de referência dado em coordenadas canônicas de Jacobi. O ponto vermelho representa o corpo central (estrela); os pontos verde-escuro indicam as posições iniciais dos planetas, segundo dado pela Tabela 5.1. As linhas largas coloridas indicam um período completo para cada trajetória.

Através da Figura 5.1, fica claro o distanciamento entre a órbita do planeta “d”, localizado mais próximo à estrela, e as trajetórias descritas pelos corpos externos “c”, “b” e “e”. Na literatura, é comum deparar-se com trabalhos que analisam o comportamento dinâmico do sistema baseados em uma abordagem do problema de quatro corpos (Martí et al., 2013; Batygin et al., 2015; Martí et al., 2016), na qual a presença do corpo mais interno, menos massivo, é ignorada, sem que haja perda significativa de informação sobre a evolução do sistema. Aqui, adotamos o mesmo procedimento, e no texto a seguir, identificamos cada massa pontual numericamente, de acordo com a relação 1-GJ 876c, 2-GJ 876b, 3-GJ 876e.

### 5.1 Comparação entre as soluções da literatura

Mencionamos anteriormente que distintas soluções para o sistema GJ 876 são encontradas na literatura. Em suma, elas diferem entre si quanto aos valores dos elementos orbitais dos planetas, suas respectivas massas e, curiosamente, os valores definidos para a

*Tabela 5.2* - Valores iniciais para os planetas 1, 2 e 3, conforme dados nas soluções publicadas por Rivera et al. (2010) e Batygin et al. (2015). Em ambos os casos, os elementos estão dados em coordenadas de Jacobi. A ordem dos dados, em cada linha, segue a ordem crescente das órbitas, isto é, da mais interna para a mais externa.

Parâmetro	Rivera et al. (2010)	Batygin et al. (2015)
$m_0$ [ $M_\odot$ ]	0.32	0.334
$m_p$ [ $M_\oplus$ ]	226.994; 723.254; 14.6	227.069; 723.492; 14.6
$a$ [ua]	0.12959; 0.208317; 0.3343	0.1296; 0.2083; 0.3343
$e$	0.25591; 0.0324; 0.055	0.256; 0.032; 0.055
$\mathcal{M}$ [deg]	294.59; 325.7; 335.0	294.59; 325.7; 335.0
$\omega$ [deg]	48.76; 50.30; 239.0	48.76; 50.30; 239.0

massa estelar. Em Rivera et al. (2010), por exemplo, a massa adotada para a estrela é  $m_0 = 0.32 M_\odot$ , baseada na relação de massa-luminosidade utilizada por Henry e McCarthy (1993). Baluev (2011), Batygin et al. (2015) e Martí et al. (2016) usaram em seus estudos  $m_0 = 0.334 M_\odot$ , seguindo o valor proposto por Correia et al. (2010). Já Nelson et al. (2016) e Millholland et al. (2018) utilizaram um valor  $\sim 10\%$  maior, obtido no trabalho de von Braun et al. (2014), no qual  $m_0 = 0.37 M_\odot$ . Em resumo, em um intervalo de menos de 10 anos, é possível encontrar trabalhos acerca do mesmo sistema que aplicam ao menos três valores distintos para a massa estelar  $m_0$ .

Assim, é interessante comparar, a nível da dinâmica, as soluções disponíveis. Tomamos uma solução para cada valor definido de  $m_0$ , a saber, Rivera et al. (2010), Batygin et al. (2015) e Millholland et al. (2018). A tabela 5.2 apresenta os valores nominais de massas e de elementos orbitais segundo Rivera et al. (2010) e Batygin et al. (2015), expostas aqui seguindo a ordem crescente de distância em relação ao corpo central. Assim como em Millholland et al. (2018), estas soluções são dadas em coordenadas de Jacobi.

Cada uma das soluções referenciadas foi integrada em um intervalo de 10 milhões de anos. Os resultados para o comportamento das excentricidades dos planetas 1, 2 e 3 estão mostrados no painéis do lado esquerdo da Figura 5.2. Do lado direito, o quadro mais amplo apresenta o comportamento do coeficiente  $\chi(t)$ , conforme obtido pelos cálculos variacionais feitos numericamente (e cujo limite assintótico, isto é, para um tempo infinito de integração, vem a ser o máximo expoente de Lyapunov, mECL).

A princípio, nota-se que as três soluções são caracterizadas por uma longa estabilidade do sistema, em contraposição à alta caoticidade presente em todas elas, conforme mostrado

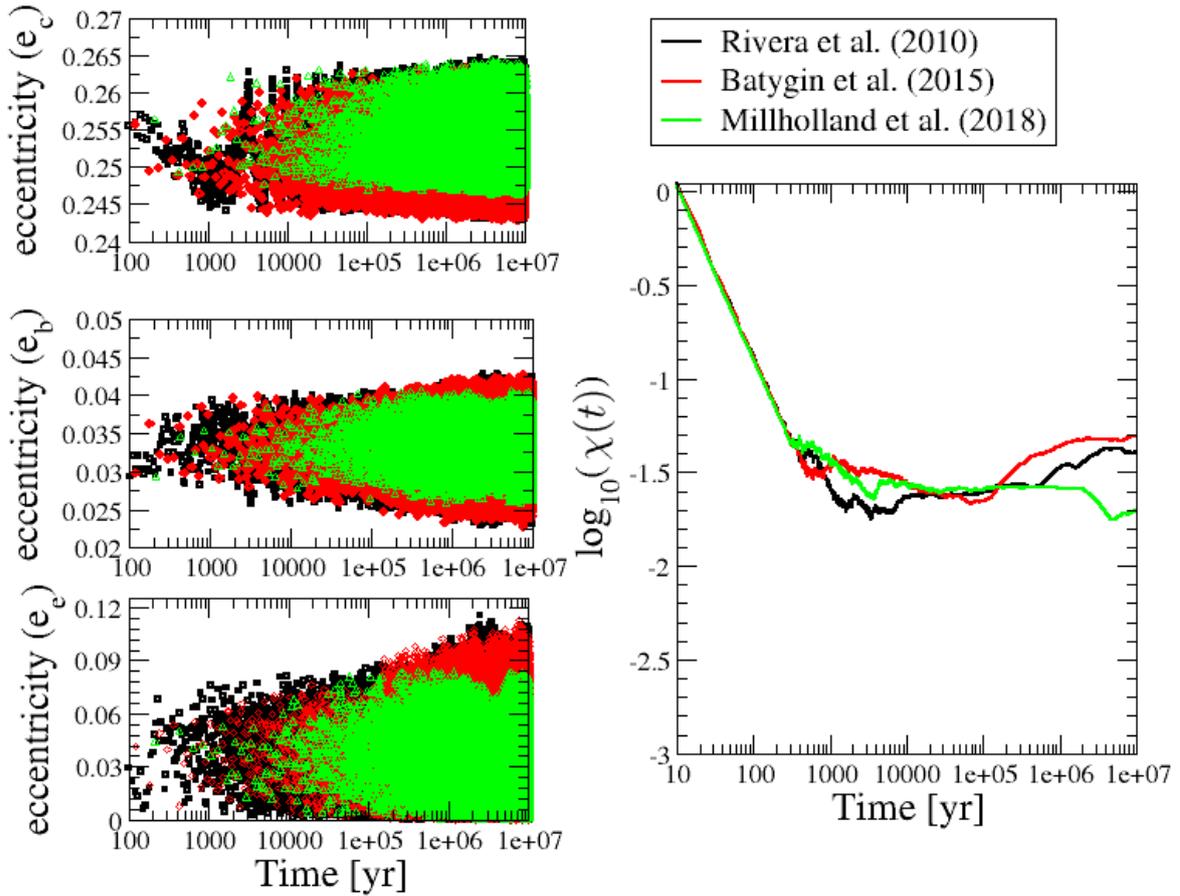


Figura 5.2: Comparação entre diferentes soluções disponíveis na literatura: Rivera et al. (2010) (preto), Batygin et al. (2015) (vermelho) e Millholland et al. (2018) (verde). Cada solução foi integrada em  $T = 10^7$  anos. Os painéis à esquerda mostram a evolução das excentricidades dos planetas 1 (superior), 2 (centro) e 3 (inferior). O painel maior, à direita, apresenta o comportamento temporal para o coeficiente  $\chi(t)$ .

pelo painel à direita da Figura 5.2. Repare que, independentemente das condições iniciais e dos valores definidos para  $m_0$ , todas as soluções apresentam, aproximadamente, amplitudes iguais de variação para as excentricidades dos planetas 1, 2 e 3 (estas amplitudes são ligeiramente menores no caso da solução de Millholland et al. (2018), mostrada em cor verde). Isto sugere que tal solução é caracterizada por uma configuração mais estável, pois as perturbações mútuas entre as massas mostram excitações menores das excentricidades. Por outro lado, os valores finais  $\chi(T)$  flutuam em torno de  $\sim 10^{-1.5} \approx 0.032 \text{ ano}^{-1}$ : para a solução de Rivera et al. (2010) (preto), o limite assintótico aparente que obtivemos aponta para um tempo de Lyapunov  $\tau_{L,Riv} \approx 25$  anos; no caso de Batygin et al. (2015) (vermelho),  $\tau_{L,Bat} \approx 20$  anos; e no caso de Millholland et al. (2018) (verde),  $\tau_{L,Mill} \approx 50$  anos. A rigor, tais valores diferem daqueles obtidos nas literaturas originais de Batygin et al. (2015) ( $\approx 7$

anos), Martí et al. (2016) ( $\approx 100$  anos), Nelson et al. (2016) ( $\approx 10$  anos), e mesmo no trabalho mais recente de Millholland et al. (2018) ( $\approx 72$  anos). Contudo, nossos resultados encontram-se dentro do intervalo de máximo e mínimo obtidos por tais autores.<sup>2</sup>

## 5.2 Ressonância de Laplace

A condição de ressonância entre os planetas 1, 2 e 3 do sistema GJ 876 é um conceito bastante consolidado na literatura, tendo sido abordado nas publicações de Rivera et al. (2010); Baluev (2011); Martí et al. (2013); Batygin et al. (2015); Nelson et al. (2016); Martí et al. (2016) e, mais recentemente, Millholland et al. (2018). Se observamos a relação entre os períodos orbitais dados pela Tabela 5.1, por exemplo, notaremos que  $P_2/P_1 \approx P_3/P_2 \sim 2$ , isto é, GJ 876c e GJ 876b encontram-se em uma ressonância 2:1, assim como GJ 876b e GJ 876e, configurando o que se conhece na literatura por *cadeia ressonante*, nas razões (do interior para o exterior) 4:2:1. Formalmente, tal configuração é denominada ressonância de Laplace (Ferraz-Mello, 1979; Barnes, 2011).

Uma vez que as estruturas dinâmicas do espaço de fase serão modeladas pelas interações ressonantes entre os pares planetários e, por conseguinte, pela ressonância de Laplace, é de importância fundamental entender o processo de evolução dos ângulos ressonantes, considerando as condições iniciais dos sistema GJ 876. Seguindo a notação de Martí et al. (2016), definimos os ângulos ressonantes para a RMM 2:1 entre os pares 1-2 e 2-3 conforme segue:

$$\theta_1 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1, \quad \theta_2 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_2, \quad (5.1)$$

$$\theta_3 = 2\lambda_3 - \lambda_2 - \varpi_2, \quad \theta_4 = 2\lambda_3 - \lambda_2 - \varpi_3, \quad (5.2)$$

de onde podemos escrever o ângulo de Laplace,  $\phi_{\text{Lap}}$ , segundo a relação

$$\phi_{\text{Lap}} = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = \theta_3 - \theta_2. \quad (5.3)$$

Compreender os regimes de oscilação/circulação, determinando as amplitudes de variação desses ângulos, possibilita o ganho de informações preciosas acerca da dinâmica da

---

<sup>2</sup> O fato de as integrações feitas a partir das condições iniciais dadas por Batygin et al. (2015) e Millholland et al. (2018), por exemplo, resultarem em valores de  $\chi$  distintos dos obtidos naqueles trabalhos reforça, qualitativamente, a característica de caoticidade inerente ao espaço de fase de GJ 876.

ressonância. É fácil perceber, por exemplo, que a oscilação simultânea dos argumentos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  implica na oscilação de  $\phi_{\text{Lap}}$ .

Além das quantidades angulares definidas em (5.1), (5.2) e (5.3), devemos também definir os ângulos ressonantes relacionados à RMM 4:1 entre os planetas 1 e 3, a exemplo de Millholland et al. (2018). Assim, teremos as seguintes combinações de longitudes:

$$\theta_5 = 4\lambda_3 - \lambda_1 - 3\varpi_1, \quad (5.4)$$

$$\theta_6 = 4\lambda_3 - \lambda_1 - 2\varpi_1 - \varpi_3, \quad (5.5)$$

$$\theta_7 = 4\lambda_3 - \lambda_1 - \varpi_1 - 2\varpi_3, \quad (5.6)$$

$$\theta_8 = 4\lambda_3 - \lambda_1 - 3\varpi_3. \quad (5.7)$$

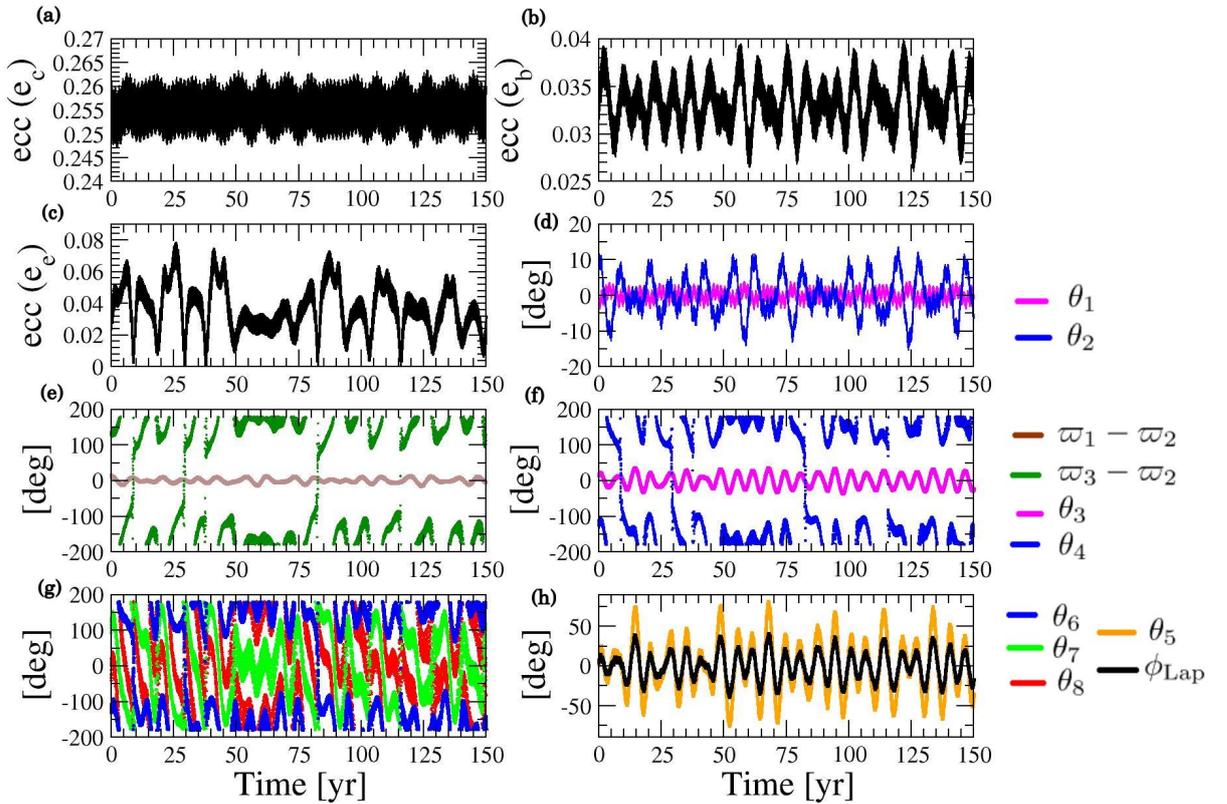


Figura 5.3: Evolução das excentricidades (a)  $e_c$ , (b)  $e_b$  e (c)  $e_e$ , e dos ângulos principais do problema ressonante, conforme definidos nas Equações (5.1) a (5.7). Consideramos a solução proposta por Millholland et al. (2018) como condição inicial. Nos quadros, mostramos intervalos curtos de evolução, de no máximo 150 anos.

Nos oito painéis da Figura 5.3, exibimos os comportamento temporal de determinadas variáveis orbitais do problema ressonante, obtidos a partir de uma solução numérica integrada dentro de  $10^4$  anos, tomando como condições iniciais aquelas dadas por Millholland

et al. (2018) (vide Tabela 5.1). Cada painel exibe a evolução do sistema para um intervalo de 150 anos (este valor foi escolhido no intuito de permitir melhor visualização da dinâmica). Nos quadros (a), (b) e (c), vemos a evolução temporal das excentricidades dos planetas 1, 2 e 3, respectivamente. Dos painéis (d) ao (h), exibimos o comportamento evolutivo dos argumentos principais do problema: em (d), estão graficados os comportamentos dos ângulos da ressonância 2:1 entre  $m_1$  e  $m_2$ , isto é,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ ; em (e), temos a evolução para as diferenças de longitude de pericentro,  $\Delta\varpi_{(1,2)} = \varpi_1 - \varpi_2$  e  $\Delta\varpi_{(2,3)} = \varpi_3 - \varpi_2$ . O quadro (f) mostra os ângulos ressonantes  $\theta_3$  e  $\theta_4$ ; (g) apresenta a evolução dos ângulos da ressonância 4:1 entre os planetas 1 e 3,  $\theta_6$ ,  $\theta_7$  e  $\theta_8$ ; e o último quadro, (h), mostra as evoluções dos argumentos  $\theta_5$  (ressonância 4:1 entre os planetas 1 e 3) e  $\phi_{\text{Lap}}$ , o ângulo de Laplace.

Os regimes de variação de excentricidade aparecem com amplitudes relativamente baixas em (a) e (b), enquanto que as excitações mais fortes ocorrem sobre a massa externa, exibidas em (c). No entanto, em todos os casos, tais amplitudes têm variações bem limitadas, para longos períodos de integração, como foi mostrado na Figura 5.2. Mesmo o planeta 3, menos massivo (e, portanto, mais suscetível às perturbações dos gigantes 1 e 2), apresenta um movimento confinado à uma região delimitada do espaço de fase.

No quadro (d) da Figura 5.3, percebe-se que o par 1-2 (“c” – “b”, nominalmente) apresenta um regime (aparente) de oscilação de ambos os ângulos ressonantes,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , que oscilam em torno de 0 grau em movimentos de baixa amplitude.<sup>3</sup> O argumento  $\theta_1$  apresenta uma amplitude inferior a 10 graus, aproximando-se do regime estacionário ( $\dot{\theta}_1 \simeq 0$ ). O quadro (e) mostra que o par planetário mais massivo apresenta um movimento no qual os apses “caminham” próximos ao alinhamento, tal que  $\Delta\varpi_{(1,2)}$  é mantido continuamente em oscilando em torno de 0 grau (vide curva marrom). A amplitude de oscilação de  $\Delta\varpi_{(1,2)}$  não supera 40 graus, ao menos ao longo de  $10^4$  anos. Tal regime de movimento, no qual a diferença de longitudes apresenta um movimento de oscilação que é concomitante à oscilação de um ou mais argumentos ressonantes, é formalmente conhecido como ressonância de co-rotação apsidal (ou ACR, do inglês *apsidal corotation resonance*, Beaugé et al. (2006)).

<sup>3</sup> Ao longo deste capítulo, usamos o termo “amplitude” para designar a quantidade compreendida entre o máximo e mínimo de variação dentro de um movimento oscilatório. Assim, o valor entre um máximo (mínimo) e o ponto médio da oscilação ficará definido, aqui, como “semi-amplitude”.

O comportamento de  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  é mais intrigante. Em dados instantes, assemelha-se a um estado de oscilação em torno de 180 graus, ou seja, há momentos nos quais os apsides dos planetas 2 e 3 precessionam oscilando em torno de uma configuração de anti-alinhamento. Por outro lado, às vezes o argumento evolui de forma circulatoria, isto é,  $0 \leq \Delta\varpi_{(2,3)} \leq 2\pi$ . Ao comparar os quadros (c) e (e), nota-se que os instantes em que  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  parece circular coincidem com os tempos nos quais  $e_3$  se aproxima de 0. Millholland et al. (2018) chamou a atenção para este fato, destacando que ambos os ângulos seculares  $\varpi_2 - \varpi_3$  e  $\varpi_1 - \varpi_3$  estão quase sempre oscilando em torno de 180 graus, o que seria indicativo de que o estado de equilíbrio do sistema consiste em uma configuração simétrica na qual a linha apsidal do planeta 3 quase co-precessiona com as linhas apsidais de 1 e 2, estando estas duas de fato presas na co-rotação. Segundo as palavras de Millholland et al. (2018), o fato de  $\Delta\varpi_{(1,3)}$  e  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  circularem justamente quando  $e_3$  se aproxima de mínimos de variação implica que essas circulações não são “dinamicamente significantes”.

No quadro (g), o regime caótico aparece bem evidente através do comportamento dos argumentos próprios da RMM 4:1 entre o par 1 e 3,  $\theta_6$ ,  $\theta_7$  e  $\theta_8$ . A exceção fica por conta de  $\theta_5$ , único argumento da ressonância 4:1 que não possui dependência com  $\varpi_3$  (vide Equações (5.4 a (5.7)). Curiosamente, no último quadro da Figura 5.3, observa-se que  $\theta_5$  possui a mesma modulação de  $\phi_{\text{Lap}}$  e de  $\theta_3$ . A única diferença entre os movimentos de  $\phi_{\text{Lap}}$  e de  $\theta_5$  é observada nas amplitudes das oscilações de cada um, que é ligeiramente maior no caso de  $\theta_5$ .

Nos gráficos da Figura 5.4, o comportamento dinâmico do sistema ao longo de uma integração de  $5 \times 10^8$  anos está representado em diferentes planos de fase, construídos em coordenadas polares. Em cada quadro, projetamos os pontos resultantes da integração sobre os planos de fase respectivos. Nos painéis superiores, utilizamos as trajetórias dos planetas 1 e 2, e mostramos a projeção sobre os planos polares  $(e_1 \cos \theta_1, e_1 \sin \theta_1)$ ,  $(e_2 \cos \theta_2, e_2 \sin \theta_2)$  e  $(e_2 \cos \Delta\varpi_{(1,2)}, e_2 \sin \Delta\varpi_{(1,2)})$ . Nos três quadros, observa-se o centro da oscilação no eixo das abcissas, positivo, enquanto que nas ordenadas a componente do seno dos argumentos oscila em torno da origem do eixo. Isso mostra que o movimento de oscilação destes argumentos, dentro do círculo trigonométrico, ocorre no 1º e no 4º quadrantes, em acordo com o que foi visto nos quadros (d) e (e) da Figura 5.3.

Os painéis inferiores exibem as projeções da evolução do sistema sobre os planos  $(e_3 \cos \theta_3, e_3 \sin \theta_3)$ ,  $(e_3 \cos \theta_4, e_3 \sin \theta_4)$  e  $(e_3 \cos \Delta\varpi_{(2,3)}, e_3 \sin \Delta\varpi_{(2,3)})$ . Na esquerda e ao

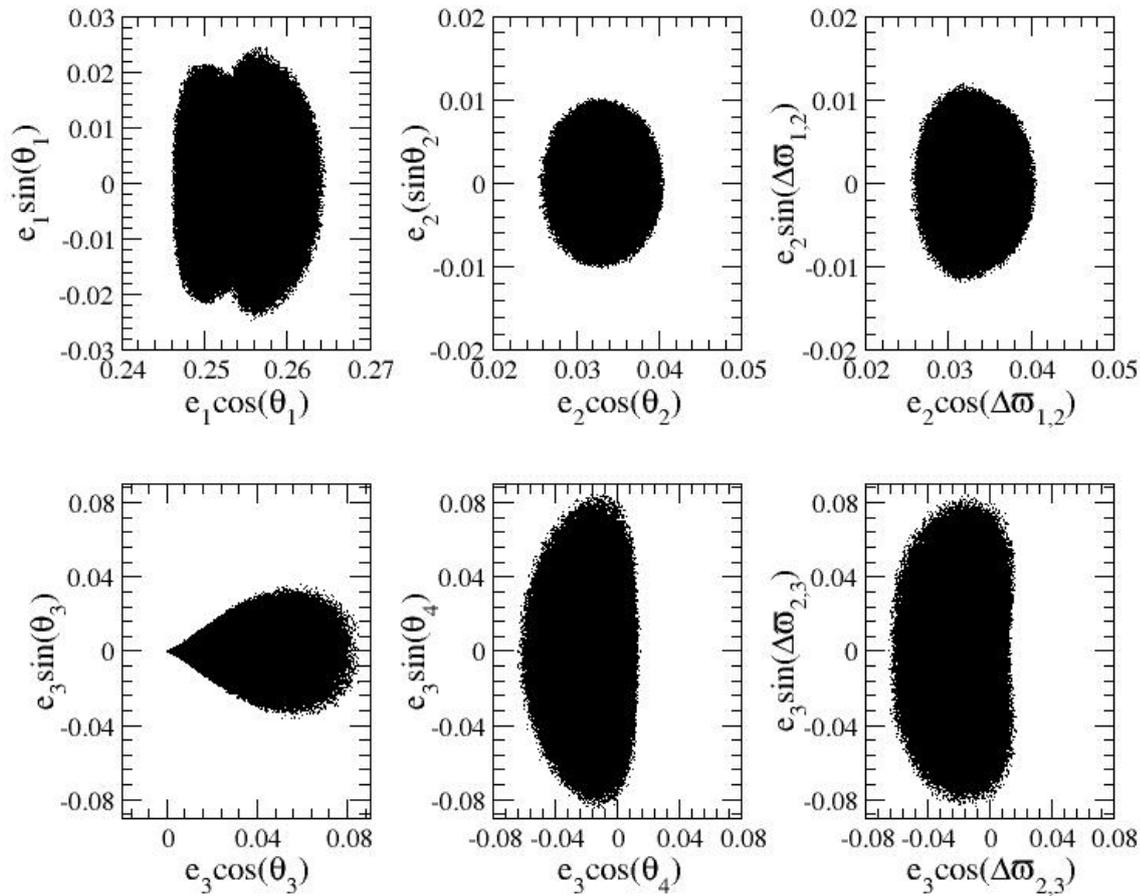


Figura 5.4: Projeções sobre os planos de fase de coordenadas polares, obtidas para uma evolução orbital integrada em  $T = 5 \times 10^8$  anos. Nos quadros superiores, vemos à esquerda o comportamento do sistema exibido sobre os planos  $(e_1 \cos \theta_1, e_1 \sin \theta_1)$ ; ao centro,  $(e_2 \cos \theta_2, e_2 \sin \theta_2)$ ; e à direita,  $(e_2 \cos \Delta \varpi_{(1,2)}, e_2 \sin \Delta \varpi_{(1,2)})$ . Nos painéis inferiores, seguindo a mesma ordem esquerda-centro-direita, exibimos  $(e_3 \cos \theta_3, e_3 \sin \theta_3)$ ,  $(e_3 \cos \theta_4, e_3 \sin \theta_4)$ , e  $(e_3 \cos \Delta \varpi_{(2,3)}, e_3 \sin \Delta \varpi_{(2,3)})$ .

centro, os quadros traduzem o comportamento da ressonância 2:1 entre as massas 2 e 3; à direita, é mostrado o comportamento do ângulo secular  $\varpi_2 - \varpi_3$ . No plano  $(e_3 \cos \theta_3, e_3 \sin \theta_3)$ , os pontos se acumulam em uma forma de cúspide, com a ponta aguda posta sobre a origem  $(0,0)$ . Para  $t \leq T$ , vale então a relação  $e_3 \cos \theta_3 \geq 0$ , isto é,  $-\pi/2 < \theta_3 < \pi/2$ , e o ângulo ressonante  $\theta_3$  oscila em torno de 0 com amplitude limitada, conforme visto no quadro (f) da Figura 5.3.

Para  $\theta_4$  e  $\Delta \varpi_{(2,3)}$ , as coordenadas polares revelam que o domínio de movimento de ambos os argumentos abrange todo o círculo trigonométrico, isto é,  $0 \leq \theta_4 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \Delta \varpi_{(2,3)} \leq 2\pi$ . Partindo da equação (5.2) e da definição de  $\Delta \varpi_{(2,3)}$ , inferimos que o nodo  $\varpi_3$  move-se muito mais rápido que  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$ , causando o efeito circulatório nas diferenças de longitudes e no ângulo da RMM 2:1 entre o par “b” – “e”.

Além disso, através dos resultados conjuntos das Figuras 5.3 e 5.4, percebe-se que aqueles argumentos que oscilam com amplitudes relativamente baixas ( $< 100$  graus) estão necessariamente relacionados à interação ressonante no par 1-2. A ressonância entre a dupla interna de planetas se mostra, de certo modo, mais forte. Os demais argumentos, mesmo quando em um plausível estado de oscilação, apresentam altas amplitudes, e o fazem sempre por dependência do movimento de  $\varpi_3$ , que está diretamente associado ao comportamento de  $e_3$ .

Na Figura 5.5, mostramos a projeção da evolução temporal do sistema sobre o plano de fase  $\dot{\phi}_{\text{Lap}} = d\phi_{\text{Lap}}/dt$  vs  $\phi_{\text{Lap}}$ . Consideramos uma integração de  $10^4$  anos da condição nominal (Tabela 5.1). O diagrama de correlação  $(\phi_{\text{Lap}}, \dot{\phi}_{\text{Lap}})$  é dado em uma escala de cores que está parametrizada pela excentricidade  $e_3$ , a exemplo de Millholland et al. (2018). É fácil verificar que os máximos valores de  $\phi_{\text{Lap}}$  e  $\dot{\phi}_{\text{Lap}}$  estão correlacionados com valores baixos de  $e_3$ , e vice-versa, o que sugere que a rápida circulação do argumento  $\varpi_3$  durante os mínimos da trajetória  $e_3$  pode estar associada à manifestação de caos no sistema (Batygin et al., 2015; Martí et al., 2016; Millholland et al., 2018).

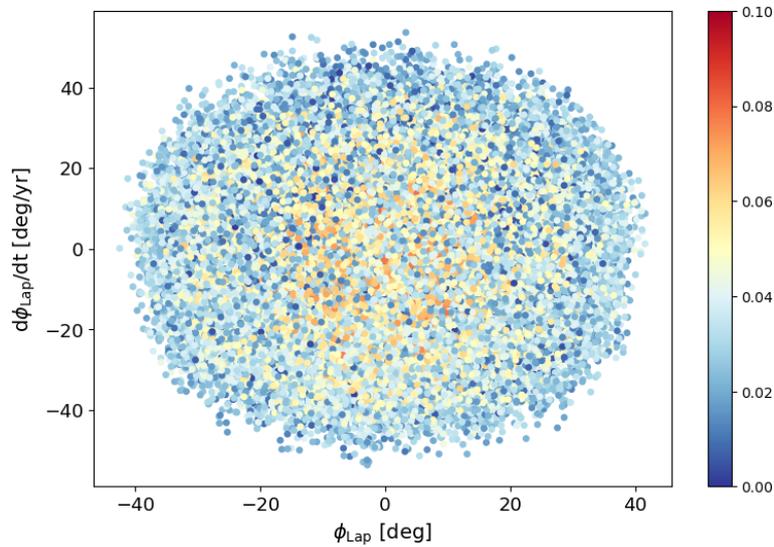


Figura 5.5: Projeção da trajetória do sistema, considerando a condição nominal integrada em  $T = 10^4$  anos, sobre o plano de fase  $d\phi_{\text{Lap}}/dt$  vs  $\phi_{\text{Lap}}$ . O mapa de cor está parametrizado pelo valor da excentricidade do planeta “e”,  $e_3$ , ao longo da evolução orbital. Verificou-se que o espaço de fase, neste caso, foi preenchido em um curto espaço de tempo.

A Tabela 5.3 apresenta as amplitudes de oscilação de cada um dos argumentos principais do problema ressonante, propriamente identificados na coluna à esquerda. Para cada

*Tabela 5.3* - Centros de oscilação e amplitudes para os argumentos principais do problema, conforme obtidos a partir de integração da condição nominal (Tabela 5.1) ao longo de  $T = 10^4$  anos, na terceira coluna, e conforme dados pelo trabalho de Millholland et al. (2018), na quarta coluna. Os espaços indicados com “\*” denotam quantidades que, em nosso estudo, foram interpretadas como movimento circulatorio, diferentemente do que foi considerado por Millholland et al. (2018).

Argumento	Centro (grau)	Amplitude (grau)	Amplitude (M18)
$\theta_1$	0	7.2	5.0
$\theta_2$	0	29.8	26.8
$\varpi_1 - \varpi_2$	0	33.5	23.8
$\theta_3$	0	70.3	62.6
$\theta_4$	180	*	171.8
$\varpi_3 - \varpi_2$	180	*	170.0
$\theta_5$	0	157.6	109.2
$\theta_6$	180	194.0	187.0
$\theta_7$	circulação	–	–
$\theta_8$	circulação	–	–
$\varpi_3 - \varpi_1$	180	*	172.6
$\phi_{\text{Lap}}$	0	74.7	53.2

quantidade, informamos os centros de oscilação (os casos onde ocorre circulação estão indicados), e a amplitude de variação angular (máximo - mínimo) encontrada em nossas simulações. A última coluna apresenta os valores para as amplitudes segundo o estudo de Millholland et al. (2018). O principal detalhe, aqui, fica por conta dos argumentos  $\theta_4$ ,  $\Delta\varpi_{(1,3)}$  e  $\Delta\varpi_{(2,3)}$ , marcados com um símbolo “\*” na tabela. Nestes casos, levando em consideração as Figuras 5.4 e 5.5, definimos que tais trajetórias efetuam rápidas circulações, diferentemente do que é dado na Tabela 6 de Millholland et al. (2018).

### 5.3 O comportamento caótico da solução nominal

Na Figura 5.6 apresentamos três espectros de potência, construídos a partir do sinal gerado pela evolução das excentricidades  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ , integrado ao longo de  $T = 10^4$  anos. Os quadros do lado esquerdo mostram a evolução temporal das excentricidades dos planetas, em preto. As curvas vermelhas resultam de um processo de integração com aplicação de filtragem digital “passa-baixo”, na qual componentes de alta frequência presentes nas soluções orbitais são eliminadas numericamente (Michtchenko e Ferraz-Mello, 1995). O perfil suavizado das curvas vermelhas, ao ser sobreposto aos dados brutos que aparecem

em preto, é evidente. Eliminando as contribuições de alta frequência (termos de curto-período), executamos a análise frequencial da evolução das excentricidades aplicando uma transformada rápida de Fourier (FFT) sobre os dados brutos.

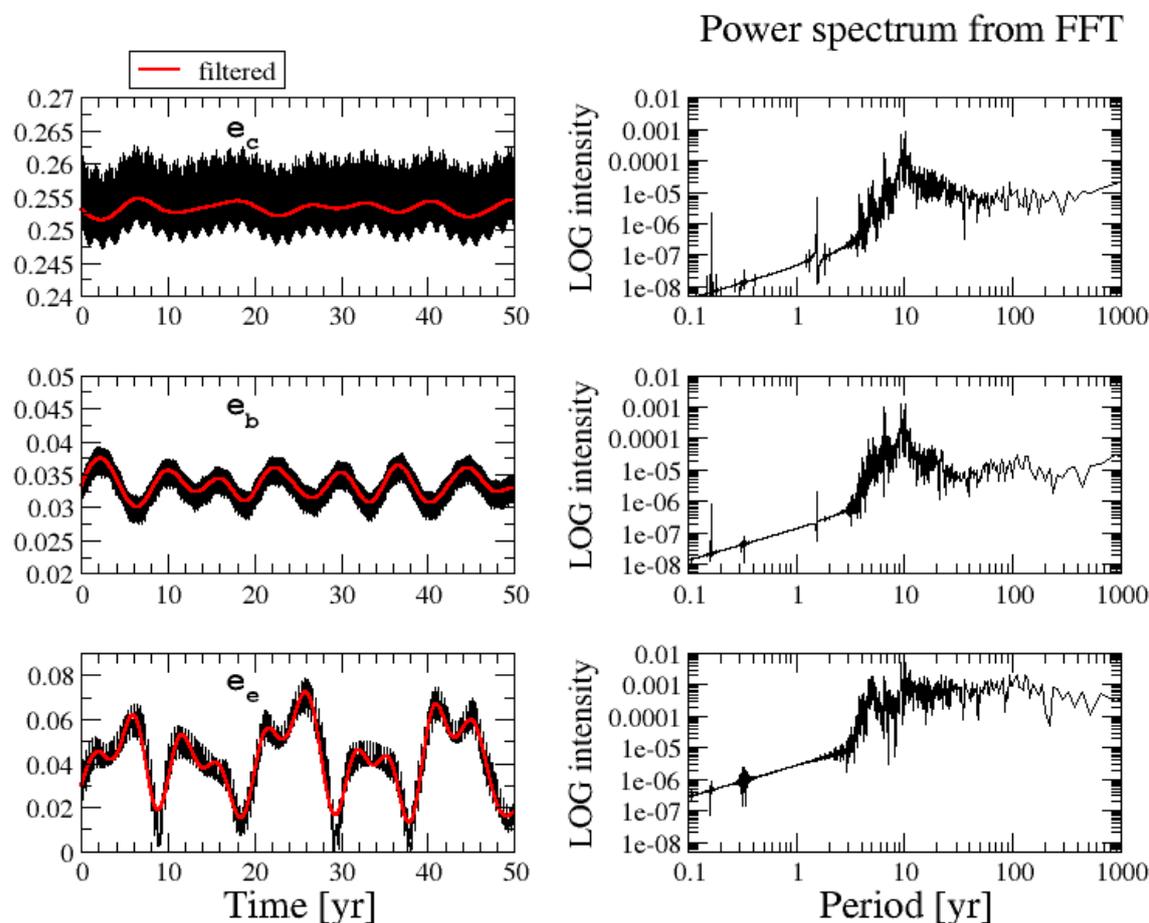


Figura 5.6: *Esquerda*: evolução temporal de  $e_1$  (alto),  $e_2$  (meio) e  $e_3$  (baixo), integrada em  $10^4$  anos e exibida dentro de um intervalo de 50 anos. É mostrado o comportamento considerando uma integração numérica simples (preto), e sobreposta a ela exibimos o resultado de uma simulação após aplicação de filtragem digital (filtro “passa-baixo” para frequências). *Direita*: espectros de potência obtidos a partir de análise de de Fourier dos sinais filtrados de cada excentricidade.

O perfil caótico da solução nominal é evidente nos três painéis, uma vez que os espectros de potência apresentam aspecto de banda-larga (*broad band*). Por um lado, os espectros de  $e_1$  e  $e_2$  são mais semelhantes entre si, com as bandas largas se estendendo por uma faixa que abrange de  $\sim 5$  anos a  $\sim 50$  anos. Diferentemente, o perfil para o sinal de  $e_3$  mostra uma banda larga mais ampla.

Nos quadros da Figura 5.7, as diferenças entre os espectros aparece mais evidente. No caso de  $e_1$  e  $e_2$ , nos dois quadros de cima, vemos picos mais bem definidos, com aspecto semelhante à função  $\delta$  (destacado pelas setas pretas), e indicando regimes aproximada-

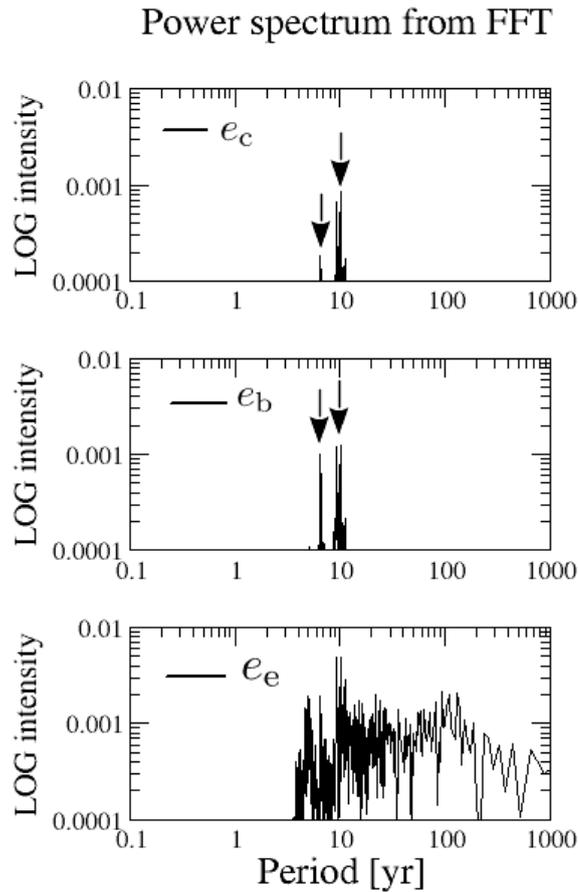


Figura 5.7: Espectros de potência obtidos a partir dos sinais das excentricidades (Figura 5.6 após remoção de parte do ruído branco).

mente periódicos de cerca de 10 anos. Já o comportamento do espectro gerado pelo sinal de  $e_3$  ainda é bastante ruidoso, mesmo após eliminar parte do ruído branco. Embora seja possível identificar os sinais mais fortes (e justamente na região de período  $\sim 10$  anos), o perfil do sinal ainda é de banda larga, indicando um regime mais caótico.

O planeta 3 (“e”) é o menos massivo, representando cerca de 6% da massa do planeta 1 (“c”), e menos de 2% da massa do planeta 2 (“b”). Assim, é razoável supor que a trajetória do corpo menor seja aquela a apresentar mudanças mais significativas de seus elementos orbitais, por efeito das perturbações advindas de sua interação com as massas maiores. Como consequência, a órbita externa seria a mais suscetível a exibir comportamento irregular e errático. Soma-se a isso o fato de o par interno apresentar um regime ressonante forte dentro da razão 2:1.

Seguindo este raciocínio, analisamos a seguir a estrutura do espaço de fase na vizinhança da posição nominal no planeta 3 (Tabela 5.1).

### 5.3.1 Análise do espaço de fase de GJ 876e

Fixamos as condições iniciais dos planetas 1 e 2 de acordo com a Tabela 5.1, e simulamos soluções numéricas para o sistema, com tempo de integração máximo de  $10^4$  anos ( $\sim 1.2 \times 10^5$  revoluções de  $m_1$ ). Cada integração foi feita a partir de uma grade de  $300 \times 300$  condições iniciais tomadas no espaço de fase  $(a_3, e_3)$ , e os demais elementos orbitais de  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  mantidos nos valores nominais dados pela Tabela 5.1.

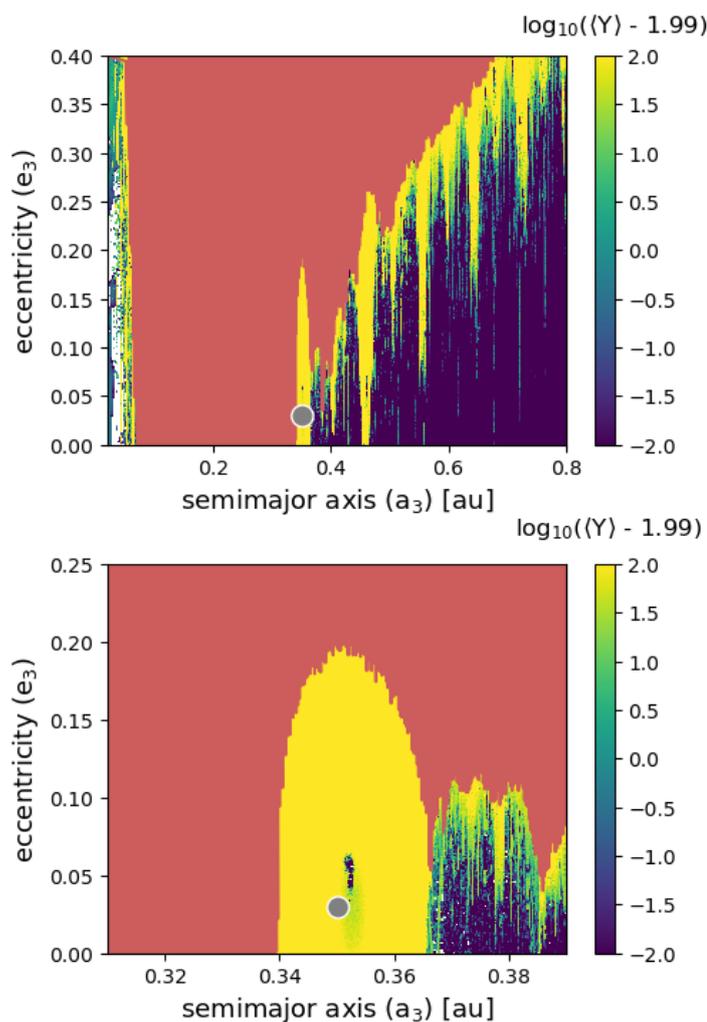


Figura 5.8: Mapas dinâmicos no espaço de condições iniciais  $(a_3, e_3)$ . O código de cores é dado de acordo com os valores computados para o indicador caótico, neste caso,  $\log_{10}(\langle Y \rangle - 1.99)$ . Regiões vermelhas denotam trajetórias instáveis em tempos inferiores ao intervalo de integração  $T = 10^4$  anos. A condição nominal do planeta 3 está marcada com o círculo cinza. No quadro inferior, é exibida uma vista ampliada do mapa completo mostrado no quadro de cima.

Os resultados de tais integrações foram aplicados na construção dos mapas dinâmicos apresentados na Figura 5.8. Cada uma das  $9 \times 10^4$  soluções foi parametrizada pelo respectivo valor calculado para o coeficiente MEGNO (Cincotta e Simó, 2000). No quadro

superior, mostramos o mapa dinâmico completo, considerando uma ampla região do plano  $(a_3, e_3)$ . O código de cores apresenta os valores para o logaritmo do coeficiente escalado do MEGNO,  $\log_{10}\langle Y' \rangle$ , onde  $\langle Y' \rangle = \langle Y \rangle - 1.99$ . Já explicamos, em capítulos anteriores, que tomar o logaritmo de  $\langle Y' \rangle$  facilita separar, com melhor resolução, as regiões fracamente caóticas das regiões mais regulares. Nesse caso, a cor escura ( $\log_{10}\langle Y' \rangle = -2$ ) indica trajetórias regulares ( $\langle Y \rangle \approx 2$ ); o amarelo representa órbitas fortemente caóticas ( $\langle Y \rangle \sim 100$ ). Condições iniciais instáveis em tempos inferiores a  $10^4$  anos estão indicadas em cor vermelha. A posição nominal do sistema aparece destacada pelo círculo cinza.

No quadro superior, percebemos a ampla região regular, intercalada por zonas afiladas de trajetórias caóticas, muitas destas localizadas em valores de  $a_3$  relacionados a comensurabilidades de altas ordens (Martí et al., 2013).

A posição do sistema, dada pelo círculo cinza, aparece dentro de uma zona com formato de “espigão”, envolta por forte caos e muito próxima do domínio de instabilidade. O quadro inferior da Figura 5.8 mostra uma vista ampliada do mapa dinâmico, exibindo a vizinhança próxima à posição nominal de  $m_3$ . Ao centro, em  $a_3 \sim 0.35$  UA, aparecem algumas fracas estruturas com comportamento estocástico distinto, se comparadas ao domínio circunvizinho.

A Figura 5.9 apresenta uma ampliação ainda maior para a vizinhança próxima à condição nominal do sistema. Nela, utilizamos uma nova escala de cores, na qual regiões regulares são mostradas em azul, e regiões altamente caóticas aparecem em vermelho. O sistema GJ 876, novamente indicado pelo círculo cinza, aparece imerso no mar caótico, dentro do qual  $\langle Y \rangle > 200$ . Isto significa que o LCE do sistema neste domínio é tal que  $\chi(T) \gtrsim 0.04 \text{ ano}^{-1}$  ( $T = 10^4$  anos), ou seja, tempos de Lyapunov de, no máximo, 25 anos. Na parte de cima e ao centro do quadro, as estruturas de regime regular ( $\langle Y \rangle = 2$ ) aparecem com mais clareza, ao menos dentro do tempo de integração ( $10^4$  anos). Além disso, são observados pequenos domínios nos quais o sistema se comporta de forma quasi-periódica, isto é,  $\langle Y \rangle < 2$ . Tais regiões estão marcadas em cor branca.

Os trabalhos de Martí et al. (2016) e Millholland et al. (2018) concordam entre si ao repartir o domínio ressonante do sistema GJ 876 em duas regiões, dois núcleos de regimes distintos, ao menos a nível do comportamento estocástico. Martí et al. (2016) faz menção a um domínio ressonante **interno**, mais regular, ou composto de órbitas mais próximas de configurações regulares; e um domínio ressonante **externo**, que é mais caótico, mas

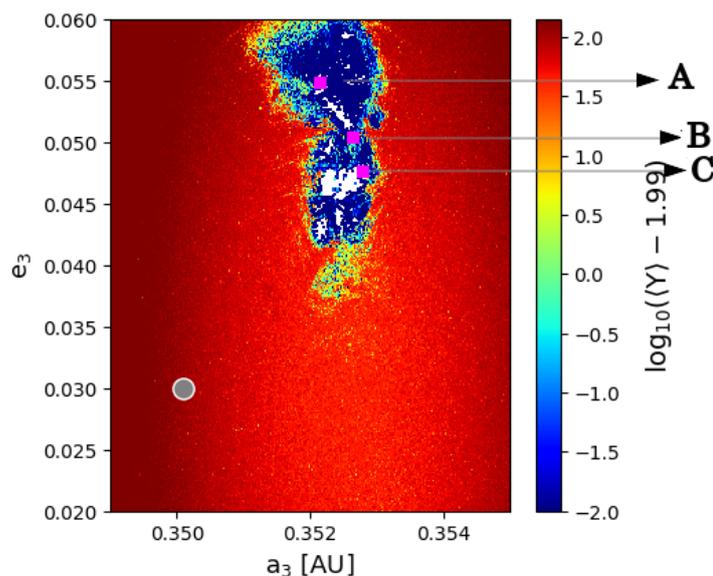


Figura 5.9: Ampliação do mapa dinâmico mostrado na Figura 5.8. Estruturas próprias de movimento regular e quasi-periódico aparecem ao centro, em cores azul e branca, respectivamente. Em vermelho, está indicado o domínio caótico, cujos tempos de Lyapunov são de, no máximo, 25 anos. A condição nominal está dentro deste mar hiper-caótico, marcada pelo ponto cinza. Dentro do domínio regular azul, marcamos com quadrados de cor magenta três condições iniciais, propriamente identificadas ao longo do texto, e que foram integradas individualmente em nosso estudo.

também é estável por longos períodos ( $\gtrsim 100$  milhões de anos), segundo apresentado em suas simulações numéricas. Millholland et al. (2018), por outro lado, separa as zonas de ressonância em uma região cujo Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  (Equações (2.4) e (2.5)) possui valores mais altos, e na qual os ângulos  $\theta_4$ ,  $\theta_6$ ,  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  e  $\Delta\varpi_{(1,3)}$  oscilam com amplitudes limitadas uma parcela de tempo, ao redor de  $\pi$ , mas ocasionalmente circulam, de tal modo que o sistema se mantém em um estado de quase co-rotação dos apses; e uma segunda região, com valores menores de  $\mathcal{H}$ , e na qual as linhas apsidais dos planetas “c”, “b” e “e” se mantêm alinhadas (ou anti-alinhadas), precessionando com velocidades médias aproximadamente iguais, configurando de fato uma dupla ACR (Millholland et al., 2018).

O núcleo interno da ressonância de Laplace mencionado por Martí et al. (2016), e chamado de “lower energy domain” (domínio menos energético, em tradução livre) por Millholland et al. (2018), aparece na Figura 5.9 como a região azulada, em destaque ao centro do quadro, para a qual  $0.352 \text{ UA} \lesssim a_3 \lesssim 0.353 \text{ UA}$  e  $0.045 \lesssim e_3 \lesssim 0.06$ .

Na Figura 5.10, mostramos mapas dinâmicos para o mesmo domínio considerado na Figura 5.9. Cada solução está parametrizada pelas semi-amplitudes de oscilação dos argumentos  $\theta_4$  (ressonância 2:1 “b” – “e”) e  $\Delta\varpi_{(2,3)} = \varpi_3 - \varpi_2$ , com as trajetórias caracteri-

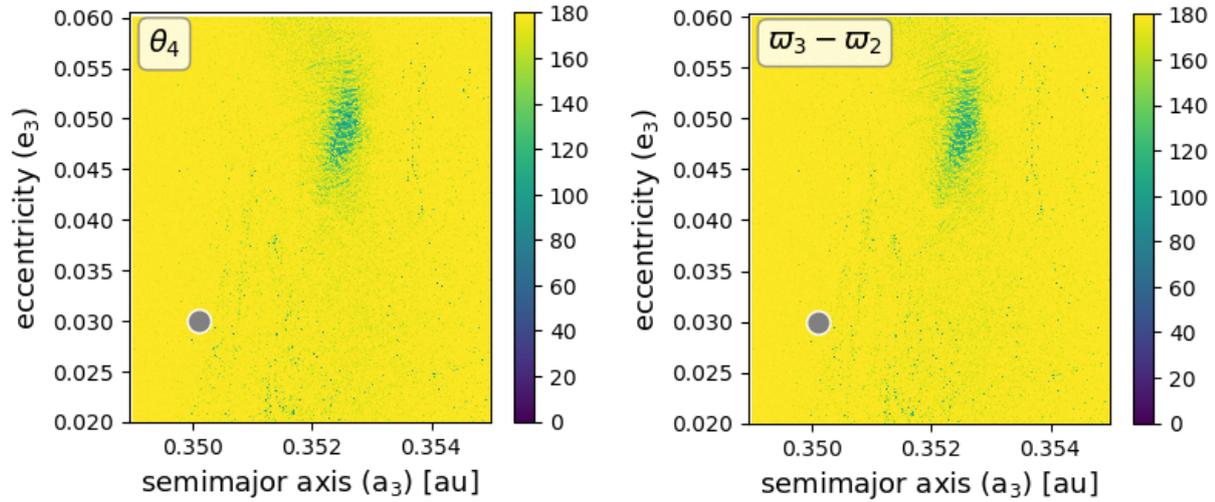


Figura 5.10: Mapas dinâmicos mostrando a estrutura do plano de condições iniciais  $(a_3, e_3)$ , considerando o domínio circunvizinho à condição nominal, a exemplo do mapa de caos da Figura 5.9. As integrações estão parametrizadas, em código de cor indicado, em termos das semi-amplitudes de oscilação dos argumentos  $\theta_4$  (RMM 4:1 entre o par 2-3) e  $\Delta\varpi_{(2,3)}$ . Sendo assim, a cor amarela representa as trajetórias de regime circulatorio.

zadas por regimes de circulação mostradas em amarelo. As condições iniciais de um grid de  $200 \times 200$  foram integradas em  $T = 10^4$  anos. Note que a região que coincidiria com o denominado domínio interno da ressonância, visto na Figura 5.9, aparece neste novo mapa marcada por oscilações de alta amplitude, em  $\theta_4$  e  $\Delta\varpi_{(2,3)}$ , configurando um regime que se aproximaria do que indicou Millholland et al. (2018): as longitudes de apsides estão alinhadas,  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  em fase (0 graus) e  $\varpi_3$  em anti-fase com os dois primeiros (180 graus).

No intuito de pôr à prova as afirmações de Millholland et al. (2018), integramos três condições iniciais tomadas dentro do chamado núcleo interno da ressonância, correspondente à zona marcada em azul no mapa da Figura 5.9. Estas condições estão marcadas com quadrados de cor magenta naquele mapa, identificadas também com as setas. Cada um delas foi simulada para um tempo de  $10^6$  anos, e consistiram de soluções de diferentes valores iniciais para  $(a_3, e_3)$ , com os demais elementos orbitais mantidos conforme a Tabela 5.1. Definimos a condição A,  $a_3 = 0.352$  UA,  $e_3 = 0.055$ ; B,  $a_3 = 0.3525$  UA,  $e_3 = 0.05$ ; e C,  $a_3 = 0.35285$  UA,  $e_3 = 0.0485$ . Na Figura 5.11, cada dupla de painel apresenta os resultados das integrações para a respectiva condição inicial, identificada pelas letras.

Os painéis à esquerda da Figura 5.11 mostram os pontos integrados das simulações projetados sobre o plano de fase  $(x, y)$ ,  $x = e_3 \cos \beta$ ,  $y = e_3 \sin \beta$  representando as coordenadas polares definidas em termos da excentricidade  $e_3$  e do argumento generalizado

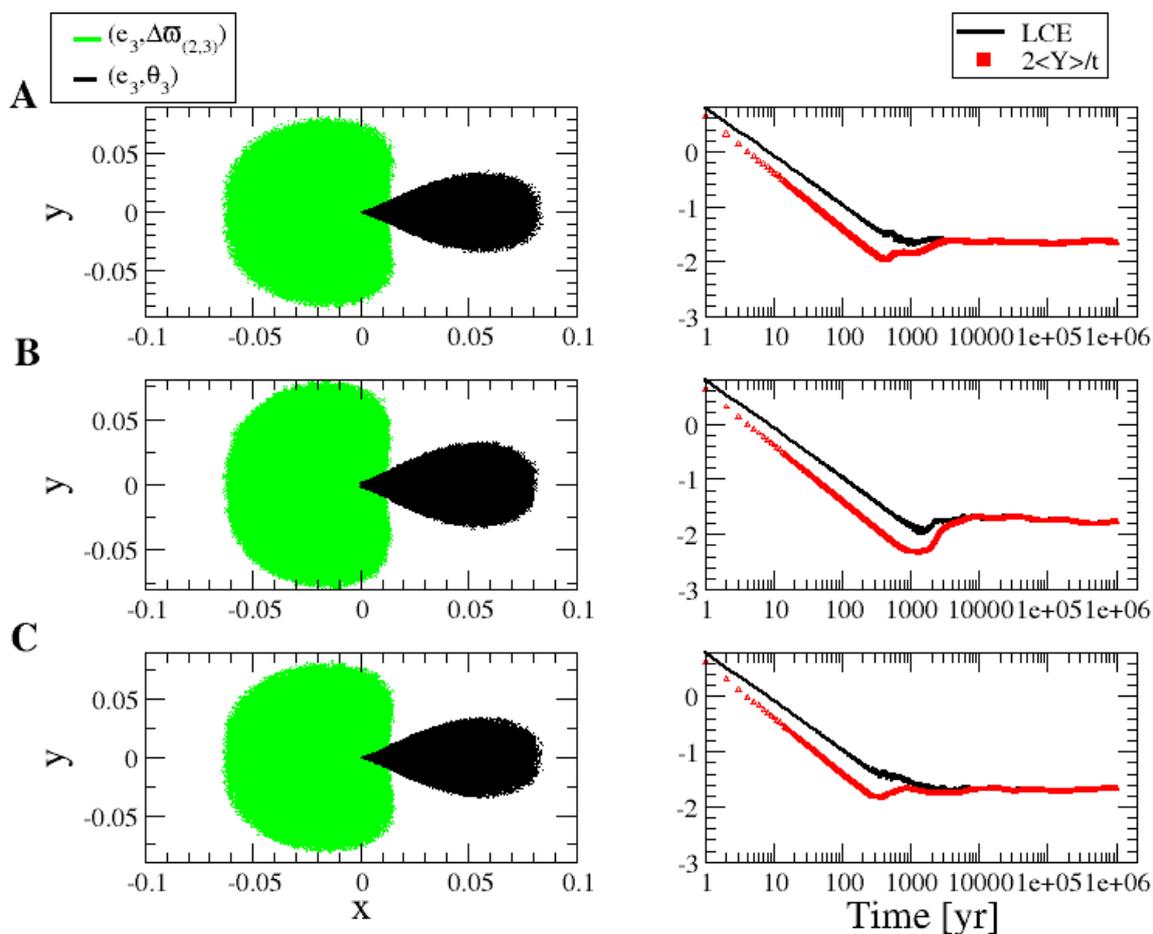


Figura 5.11: Esquerda: Projeções das trajetórias integradas em  $T = 10^6$  anos a partir das condições iniciais A, B e C, sobre o plano de fase de coordenadas polares generalizadas  $(e_3 \cos \beta, e_3 \sin \beta)$ . De acordo com as legendas, definimos  $\beta = \theta_3$  pelos pontos pretos, e  $\beta = \Delta\varpi_{(2,3)}$  pelos pontos verdes. Próximo à origem  $(0,0)$ , os pontos pretos sobrepõem os pontos verdes. Assim, de fato o argumento  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  é caracterizado por regimes de circulação quando  $e_3$  aproxima-se de zero, semelhantemente ao que ocorre com a condição nominal do sistema. Direita: comportamento temporal da computação do LCE de cada solução. Em vermelho, aparecem os valores do indicador caótico derivado a partir da relação LCE-Megno.

$\beta$ . Para cada cor,  $\beta$  representa um determinado argumento do problema ressonante:  $\theta_3$  (preto), e  $\Delta\varpi_{2,3}$  (verde). Os painéis à direita exibem o comportamento temporal do LCE ( $\chi$ ), dado diretamente das equações variacionais (preto), e derivado também indiretamente, através da relação algébrica entre o LCE e o fator MEGNO (vermelho).

Nota-se, em primeiro lugar, que as três soluções se comportam de maneiras bastante parecidas, e análogas ao regime de movimento que foi identificado para a condição nominal (Figura 5.4). Isto significa que o argumento de pericentro  $\varpi_2$  se move alinhado com  $\varpi_1$ , de tal modo que, nos três casos,  $\Delta\varpi_{(1,2)}$  oscila em torno de zero com amplitude limitada. Por outro lado, os pontos verdes deixam claro que o pericentro  $\varpi_3$  ainda circula quando

$e_3$  se aproxima de zero. O sistema se encontraria, assim, em estados de quase dupla co-rotação, semelhantemente à condição inicial, e diferentemente do que propôs Millholland et al. (2018), para o caso específico do domínio interno da ressonância.

Além disso, os painéis à direita mostram que as três condições são caracterizadas por valores de LCE próximos, com  $\log_{10} \chi \sim -1.8$  nos três casos, isto é,  $\chi \approx 0.016 \text{ ano}^{-1}$ , ou  $T_L \sim 60$  anos. Esse valor é bastante próximo ao que foi obtido para a condição nominal, como é visto no painel direito da Figura 5.2. Sob o aspecto da estocasticidade, em particular, é um resultado que não corrobora a existência de um dito núcleo ressonante interno, no qual as trajetórias apareceriam mais regulares.

Por último, destacamos o comportamento das curvas pretas e vermelhas, que mostram um bom acordo entre si, evidenciando mais uma vez a correspondência entre as medidas de LCE e de MEGNO.

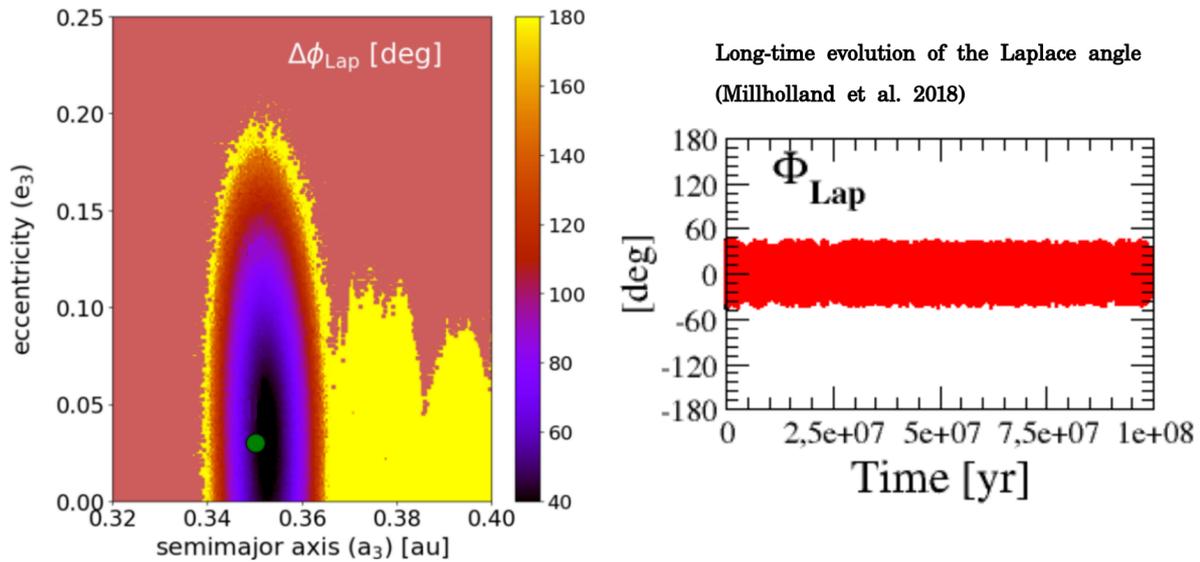


Figura 5.12: *Esquerda*: mapa de estrutura para espaço de condições iniciais  $(a_3, e_3)$ , parametrizado pela semi-amplitude de oscilação do ângulo de Laplace. Cada trajetória foi integrada por  $10^4$  anos, sendo tomada de uma malha de  $200 \times 200$  condições iniciais. Órbitas intáveis estão coloridas em cor rósea. A condição nominal do sistema aparece marcada pelo ponto verde. *Direita*: evolução de longo período do argumento  $\phi_{Lap}$ , integrada numericamente em  $10^8$  anos, considerando a condição inicial nominal (Tabela 5.1).

O mapa dinâmico da Figura 5.12 destaca as estruturas de oscilação do ângulo de Laplace ( $\phi_{Lap}$ ). Neste caso, construímos o mapa para o domínio completo que define a ressonância ( $0.34 < a_3 < 0.37$ ), incluindo também as regiões externas. Cada nó da malha de  $200 \times 200$  condições iniciais está parametrizado pela semi-amplitude de variação de  $\phi_{Lap}$  ao longo de

integrações de  $10^4$  anos. A cor amarela indica condições de circulação do argumento. Em vermelho claro, vemos as regiões instáveis em  $t < 10^4$  anos.

No painel direito da Figura 5.12, exibimos a evolução do argumento  $\phi_{\text{Lap}}$  ao longo de  $10^8$  anos, mostrando que o estado ressonante (oscilação em torno de 0 grau) é perene, e pode estar diretamente associado à condição de estabilidade do sistema por largas escalas de tempo.

## 5.4 Estimativas de tempos de instabilidade aplicando entropia Shannon

Analisamos a seguir o cenário de estabilidade global<sup>4</sup> de GJ 876, sob a perspectiva da difusão das ações no espaço de fase, mensurada via entropia Shannon.

### 5.4.1 Simulações sobre um segmento de condições iniciais de $a_3$

Partimos de uma análise de um conjunto de  $X$  condições iniciais tomadas sobre um segmento do subespaço  $a_3 \in [0.33, 0.39]$  UA, fixando os demais elementos orbitais segundo os valores nominais (Tabela 5.1). Primeiramente, integramos  $X = 200$  sistemas fictícios, através de simulações diretas feitas com o código `Ncorp`, para um tempo máximo de integração  $T = 10^8$  anos. Os resultados estão exibidos como pontos pretos no quadro único da Figura 5.13, e designam assim os tempos de disrupção  $t_{\text{dis}}$ , obtidos numericamente em função dos valores iniciais de  $a_3$ .

Ainda no painel da Figura 5.13, os círculos vermelhos mostram os valores computados para os tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(S)$ , estimados através do cálculo da entropia Shannon (Equação (2.25)). De maneira análoga, os círculos verdes representam os valores de tempos de instabilidade  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$ , obtidos a partir da derivada temporal do logaritmo do número de células de partição preenchidas  $(\ln q_0)^5$ . Em ambas as simulações que geraram os pontos vermelhos e verdes, integramos um conjunto de  $X = 10^4$  sistemas fictícios ao longo do intervalo de  $a_3$ , em um tempo  $T \sim 10^4$  anos (a linha tracejada horizontal define o limite de integração aplicado ao método). Cada condição inicial foi integrada em conjunto com um ensemble de 5 sistemas-fantasma.

<sup>4</sup> Por estabilidade global entenda-se o cenário macroscópico de estabilidade de Lagrange do sistema.

<sup>5</sup> No Apêndice deste trabalho, explicamos a diferença entre o coeficiente de difusão  $D_S$ , obtido do cálculo da entropia  $S$ , e o coeficiente de difusão  $D_{q_0}$ , obtido a partir da contabilização do número de células preenchidas,  $q_0$ .

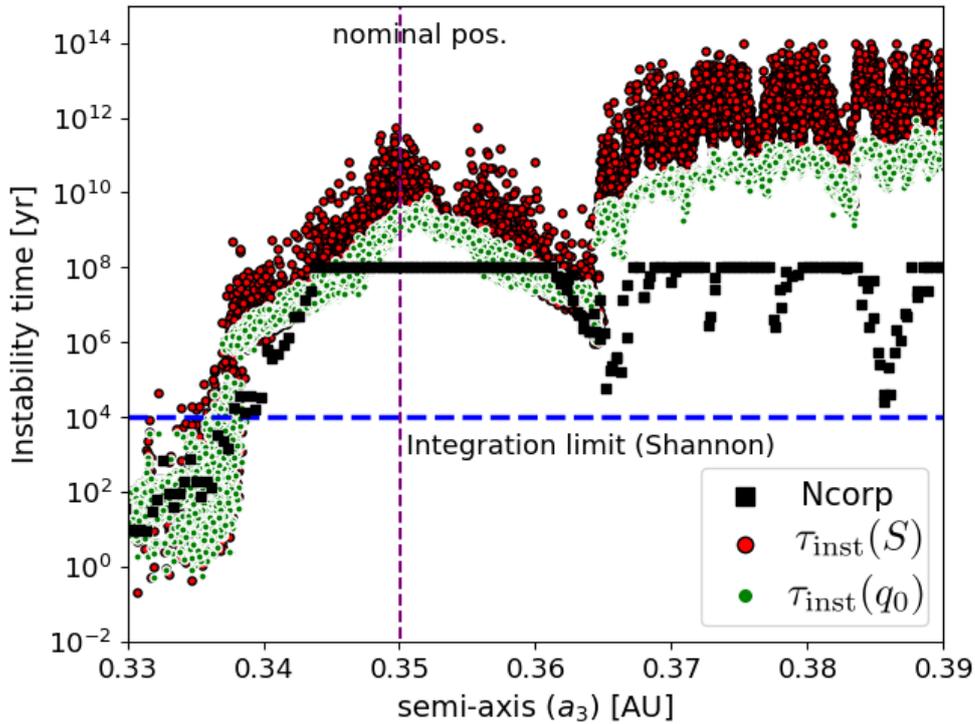


Figura 5.13: Tempos de instabilidade estimados para um conjunto de valores iniciais de  $a_3$ . Os demais valores orbitais foram mantidos fixos segundo a condição nominal dada pela Tabela 5.1. Quadrados pretos mostram os tempos de ruptura ( $t_{\text{dis}}$ ) obtidos diretamente de integrações feitas com o código `Ncorp`, para um tempo de integração  $T = 10^8$  anos. Os círculos vermelhos indicam os valores de tempos de instabilidade obtidos a partir da difusibilidade  $D_S$ ,  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Já os círculos verdes representam as estimativas de tempos de instabilidade calculadas a partir de  $d(\ln q_0)/dt$ , isto é, a derivada temporal do logaritmo do número de células ocupadas dentro da partição.

O acordo entre os resultados de  $t_{\text{dis}}$ ,  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$  é razoável na faixa onde vale a ressonância de Laplace, mas apresenta discrepâncias curiosas em outras regiões. A faixa não-ressonante, na qual  $a_3 \lesssim 0.34$  UA, aparece indicada como rapidamente instável pelas estimativas de Shannon, em acordo com os resultados das integrações puras. De forma similar, a parte interna da ressonância, no entorno da condição nominal (marcada pela linha tracejada vertical), encontra-se associada a longas escalas de tempo de instabilidade, exibindo  $\tau_{\text{inst}}(S), \tau_{\text{inst}}(q_0) > 10^8$  anos, o que é consistente com o observado, no caso do sistema real. Da mesma forma, os quadrados pretos mostram que as simulações nesta região atingiram o limite de integração ( $10^8$  anos).

O acordo entre as estimativas feitas com a entropia Shannon e as simulações diretas também ocorre no domínio fronteiro da ressonância, em  $a_3 \approx 0.34$  UA e  $a_3 \approx 0.362$  UA. Embora as simulações que aplicam Shannon superestimem em até duas ordens de

grandeza, aparentemente, os tempos de instabilidade nessas faixas, tanto  $\tau_{\text{inst}}(S)$  quanto  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$  mostram uma tendência que corrobora a disposição dos quadrados pretos.

Para  $a_3 \gtrsim 0.365$  UA, começam a aparecer discrepâncias mais notáveis. Em determinados intervalos de  $a_3$ , as simulações diretas saturam o tempo máximo de integração, indicando que o sistema apresenta estabilidade de longos períodos. A alta estabilidade é corroborada pelas estimativas de Shannon, mas os valores aparentam ser superestimados, relativamente aos quadrados pretos, e chegam a tempos  $\sim 10^{11}$  anos, no caso de  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$ , e  $\sim 10^{13}$  anos, para  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . Além disso, há um desacordo forte entre as estimativas e os valores de  $t_{\text{dis}}$  nas faixas finas com estrutura de reentrância, nas quais os tempos de simulação direta são curtos, indicando regiões instáveis, mas que no caso das estimativas de entropia ainda aparecem com altas escalas de tempo de instabilidade.

Outra característica interessante pode ser percebida ao comparar os pontos vermelhos e verdes: a dispersão dos resultados no primeiro caso, analisada para as condições iniciais adjacentes, é sensivelmente maior que no segundo caso. Isto parece ocorrer mais intensamente dentro do domínio ressonante ( $0.34 < a_3 < 0.36$ ), e para altos valores do semi-eixo de  $m_3$  ( $a_3 \gtrsim 0.37$  UA).

#### 5.4.2 Análise do comportamento difusivo da condição nominal

Analisamos o comportamento difusivo da solução nominal do sistema GJ 876, considerando uma longa integração. O quadro à esquerda da Figura 5.14 mostra a evolução da quantidade

$$\Lambda^2 = I_3^2 + J_3^2 = a_3^2(1 + (1 - e_3^2)^2). \quad (5.8)$$

A grandeza  $\Lambda^2$  é função dos elementos orbitais  $a_3$  e  $e_3$ , e tem dimensão de ação quadrática. Ao longo da evolução do sistema, simulada para um tempo  $T \sim 5 \times 10^8$  anos, vemos que  $\Lambda^2$  oscila dentro de uma amplitude bem definida, o que é esperado, devido às oscilações que já mostramos para  $e_3$ . Dentro de um largo intervalo de tempo, é possível notar, além das oscilações quasi-periódicas, o comportamento do sistema em escala secular, para o qual é observado o afastamento da curva em relação ao ponto (ou à região) do início do movimento. Esse desvio reflete justamente a difusão das ações dentro do espaço de fase.

Nesse sentido,  $\Lambda^2$  pode ser tomada como uma espécie de métrica do comportamento secular das ações dentro do espaço de fase. Para uma longa integração ( $\sim 10^8$  anos), é possível calcular o desvio médio da trajetória de  $\Lambda^2$  em relação ao ponto inicial, e associar

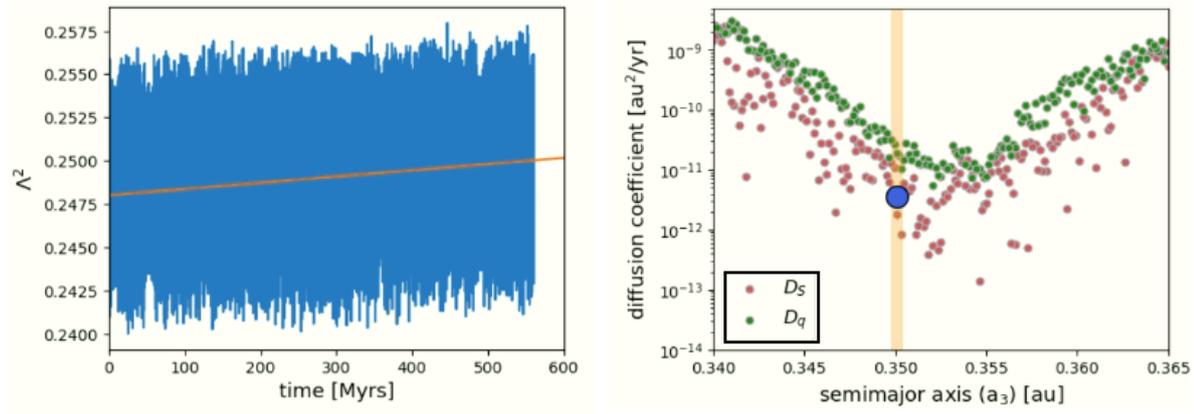


Figura 5.14: *Esquerda* Evolução temporal de  $\Lambda^2 = a_3^2(1 + (1 - e_3^2)^2)$ , obtida a partir de uma simulação numérica da condição inicial por aproximadamente  $5.5 \times 10^8$  anos. A linha laranja exibe a taxa de difusão média, determinada a partir de regressão linear (mínimos quadrados) feita sobre os dados brutos (curva azul), e que corresponde a aproximadamente  $3.6 \times 10^{-12}$  UA/ano. *Direita:* os círculos vermelhos representam os valores estimados via entropia Shannon para a difusividade  $D_S$ , calculados através da equação (2.23), e obtidos para o conjunto de condições iniciais de  $a_3$  indicado no eixo  $x$ ; analogamente, os círculos verdes indicam os valores estimados para o coeficiente de difusão  $D_{q_0}$ , para o mesmo conjunto de condições iniciais (veja o Apêndice para detalhes acerca da distinção entre  $D_S$  e  $D_{q_0}$ ). A taxa de difusão  $D$ , computada a partir da simulação exibida no painel superior, está indicada pelo círculo maior de cor azul.

tal desvio, mais tarde, à uma velocidade de afastamento em relação à origem do movimento e, a partir disso, chegar-se a uma escala de tempo de difusão. Na realidade, essa é a premissa por trás do método da entropia Shannon.

Usando regressão linear sobre a distribuição de pontos dada no quadro esquerdo da Figura 5.14, obtivemos a curva laranja, que está sobrepostas aos dados brutos em azul. O coeficiente angular da reta laranja corresponde a uma velocidade (média) de afastamento de  $\Lambda^2(t)$  em relação ao ponto inicial  $\Lambda^2(t_0)$ ,  $t_0 = 0$ . Verificamos que essa velocidade de afastamento, ou de difusão sobre o plano de fase, é da ordem de  $D \sim 3 \times 10^{-12}$  UA $\cdot$ ano $^{-1}$ .

Verificar a variação de uma quantidade física ao longo do tempo e associa-la à difusão caótica característica de um sistema planetário é uma metodologia que foi aplicada, por exemplo, através de análise de frequência (Laskar, 1990; Laskar, 1993). Na prática, a ideia neste caso consiste em integrar as trajetórias planetárias dentro de dois intervalos de tempo consecutivos,  $t$  e  $t'$ , que constituem um intervalo completo de integração  $T = t + t'$ . Em cada intervalo, determina-se os valores dos movimentos médios de um dos corpos,  $n$  (para  $t$ ) e  $n'$  (para  $t'$ ). Enfim, é calculada uma medida para a diferença,  $D_{\text{freq}} = |n - n'|/T$ , dada em unidades de graus $\cdot$ ano $^{-2}$ .  $D_{\text{freq}}$  é tomada como uma medida da difusão caótica do

sistema: deve ser próxima a zero para órbitas regulares, e atingirá altos valores conforme mais caótico se torne o movimento (Correia et al., 2005).

O fato de o coeficiente calculado  $D$  ser relativamente baixo sugere que a posição nominal do sistema tende a ser estável a tempos extremamente longos, da ordem de (ou superiores) à medida  $\sim D^{-1}$  ( $\gg 1$  Giga-ano). O sistema se afasta lentamente do estado inicial, ou seja, possui baixa difusividade.

O painel direito da Figura 5.14 apresenta os valores estimados de para o coeficiente de difusão, obtidos via entropia Shannon, e considerando um conjunto de condições iniciais tais que  $a_3 \in [0.340, 0.365]$  UA, na vizinhança próxima à condição nominal. Os pontos vermelhos correspondem aos valores de difusividade obtidos diretamente do cálculo da entropia  $S$ , isto é,  $D_S$ , enquanto que os pontos verdes foram tomados a partir da derivada temporal do logaritmo do número de células ocupadas ( $\ln q_0$ ),  $D_{q_0}$ . O ponto azul, destacado pela faixa vertical amarela, representa o valor  $D$ , calculado a partir do comportamento temporal de  $\Lambda^2(t)$  mostrado no painel esquerdo, e que define a taxa de afastamento médio da trajetória do planeta 3 em relação à condição inicial nominal.

Tanto  $D_S$  quanto  $D_{q_0}$  apresentam um comportamento global similar, exibindo valores baixos de difusividade, com o mínimo local localizado próximo a posição nominal do planeta 3 (faixa amarela). Os valores de coeficiente de difusão estimados a partir de  $q_0$ , entretanto, mostram-se sistematicamente maiores do que  $D_S$ , em torno de uma ordem de magnitude, indicando um comportamento mais difuso, isto é, difusão mais rápida, o que implica em tempos de instabilidade mais curtos. Em contrapartida, e como já havia sido destacado na Figura 5.13,  $D_S$  é apresenta uma maior dispersão entre os dados. Por fim, vemos que o valor de  $D$  está localizado dentro da tendência definida pela distribuição dos pontos de  $D_S$ .

### 5.4.3 Mapas de instabilidade para o corpo menos massivo

O espaço de fase definido pelo plano  $(a, e)$  foi analisado para o planeta 3, em termos da estabilidade macroscópica, ao redor da condição nominal. Na Figura 5.15, estão exibidos dois mapas dinâmicos, resultantes da integração de uma grade de  $200 \times 200$  condições iniciais tomadas sobre o plano  $(a_3, e_3)$ . A posição nominal do sistema aparece destacada pelo círculo branco. Cada trajetória foi integrada por um tempo  $T \sim 10^4$  anos.

Os dois painéis exibem mapas de instabilidade construídos aproximadamente para o

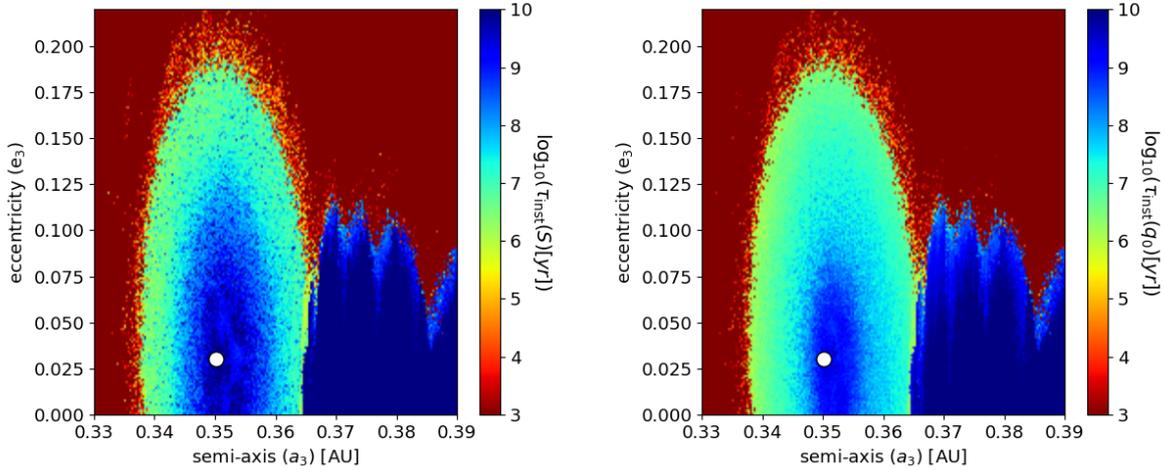


Figura 5.15: Mapas de tempos de instabilidade, construídos para uma grade de  $200 \times 200$  condições iniciais do plano  $(a_3, e_3)$ , integrada em  $T \sim 10^4$  anos. Cada solução foi integrada conjuntamente com um ensemble de 5 trajetórias-fantasma. O ponto branco identifica a posição nominal do sistema. *Esquerda*: mapa de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . *Direita*: mapa de  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$ .

mesmo domínio que foi mostrado no quadro inferior da Figura 5.8. O gráfico à esquerda considera estimativas de tempos de instabilidade obtidas diretamente de  $S$ , ou seja,  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . À direita, os tempos de instabilidade foram derivados a partir de  $d(\ln q_0)/dt$ , ou seja,  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$ .

Comparativamente, observa-se que fora do domínio ressonante, os mapas apresentam valores de tempos de instabilidade próximos entre si: para  $a_3 \gtrsim 0.365$  UA, e  $e_3 \lesssim 0.1$ , encontramos alta estabilidade para o sistema, com tempos de instabilidade da ordem de dezenas de bilhões de anos.

Dentro do domínio da ressonância ( $0.340 < a_3 < 0.365$ ), os resultados mostram acordo razoável: há uma faixa externa, destacada em ciano, para a qual os tempos de instabilidade são mais curtos ( $\sim 10^7$  anos), isto é, condições iniciais caracterizadas por difusão (relativamente) rápida. Ao compararmos os mapas da Figura 5.15 com o mapa de amplitudes de oscilação da Figura 5.12, vemos que existe uma aparente correlação entre esta faixa externa e os domínios aonde  $\phi_{\text{Lap}}$  oscila com altas amplitudes, superiores a 100 graus. Analogamente, a região mais interna da zona de ressonância, aqui mostrada em azul escuro, e que outrora foi caracterizada com amplitudes de oscilação da ordem de 60 a 80 graus (Figura 5.15), aparece associada a tempos de instabilidade da ordem de Giga-anos. Este núcleo interno de estabilidade aparece mais amplo no painel esquerdo, que está parametrizado por  $\tau_{\text{inst}}(S)$ ; à direita, os resultados das estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$  definem o núcleo de maior

estabilidade em uma região menor, e mais concentrada na vizinhança próxima à condição nominal.

#### 5.4.4 Mapas de instabilidade para o corpo mais massivo

Repetimos a análise de estabilidade ao espaço de fase do planeta 2, o corpo mais massivo do sistema e que, ao menos no aspecto de hierarquia de distâncias, constitui o elo da cadeia ressonante 4:2:1. Os mapas dinâmicos mostrados na Figura 5.16 foram construídos a partir de integrações de uma grade de  $200 \times 200$  condições iniciais, simuladas em  $T = 10^4$  anos, e tomadas sobre o plano de fase  $(a_2, e_2)$ . Para este conjunto de mapas, mostramos resultados parametrizados por três quantidades diferentes. O painel esquerdo mostra um mapa dinâmico obtido a partir do MEGNO, com as escalas de cores dadas em termos dos tempos de Lyapunov ( $T_L$ ) de cada solução (usamos a relação de equivalência entre o MEGNO e o LCE). O painel central é um mapa dinâmico da mesma região, no qual exibimos os valores de semi-amplitude do ângulo de Laplace ( $\phi_{Lap}$ ), obtidos ao longo de  $T$ . Tanto no quadro esquerdo quanto no quadro central a região marcada de branco indica zonas de instabilidades a tempos  $t < T$ . O painel à direita apresenta o mapa com os tempos de instabilidade ( $\tau_{inst}(S)$ ), gerados a partir do cálculo da entropia Shannon, considerando para cada condição inicial um ensemble contendo 5 trajetórias-fantasmas além da órbita original.

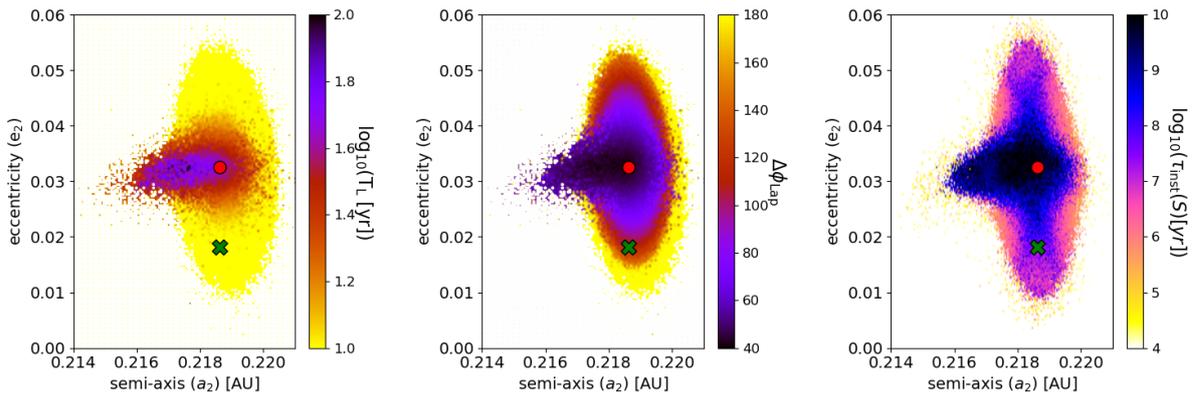


Figura 5.16: Mapas dinâmicos contruídos sobre o plano de fase  $(a_2, e_2)$ , utilizando uma grade de  $200 \times 200$  condições iniciais. Cada uma delas foi integrada por um tempo máximo  $T = 10^4$  anos. À esquerda, é exibido um mapa MEGNO, parametrizado pelo tempo de Lyapunov  $T_L$ . Ao centro, vemos as estruturas das semi-amplitudes de oscilação do argumento de Laplace,  $\phi_{Lap}$ . Finalmente, à direita, temos um mapa de tempos de instabilidade,  $\tau_{inst}(S)$ . A condição nominal do sistema aparece indicada pelo ponto vermelho. A cruz verde localiza uma determinada condição inicial singular, simulada individualmente.

Observamos que o domínio para o qual o sistema apresenta comportamentos de estabilidade mais duradoura tem uma fina espessura, tanto em semi-eixo quanto em excentricidade. No eixo de  $a_2$ , essa largura é de ordem de 0.003 UA, e em  $e_2$ , próximo de 0.04. No mapa do primeiro quadro, é possível verificar que o sistema está inserido em uma região cujos tempos de Lyapunov são da ordem de algumas décadas ( $\sim 60$  anos). A condição nominal, marcada pelo ponto vermelho em todos os painéis, aparece localizada na zona com os menores valores para o LCE, o que sugere regimes levemente caóticos, relativamente aos entornos, destacados em amarelo, e que contemplam regiões com  $T_L \sim 10$  anos, próximas às zonas de instabilidade. Nenhuma condição inicial apresenta tempos de Lyapunov superiores a 100 anos, com espaço de fase do sistema caracterizado por hiper-caoticidade.

O mapa de  $\Delta\phi_{\text{Lap}}$ , ao centro, exhibe estruturas do espaço que são análogas às vistas no painel maior da Figura 5.12. Primeiro, a existência de um domínio interno da ressonância, no qual o ângulo de Laplace oscila com amplitudes mais baixas ( $\sim 80$  graus), que crescem a medida em que o planeta 2 é colocado em condições iniciais afastadas da posição nominal do sistema, localizada aproximadamente no centro da ressonância. Nas regiões externas,  $\phi_{\text{Lap}}$  executa oscilações com amplitudes de até 280 graus, antes de atingir a faixa de circulação, que marca a fronteira com os domínios de rápida instabilidade ( $t_{\text{dis}} < 10^4$  anos).

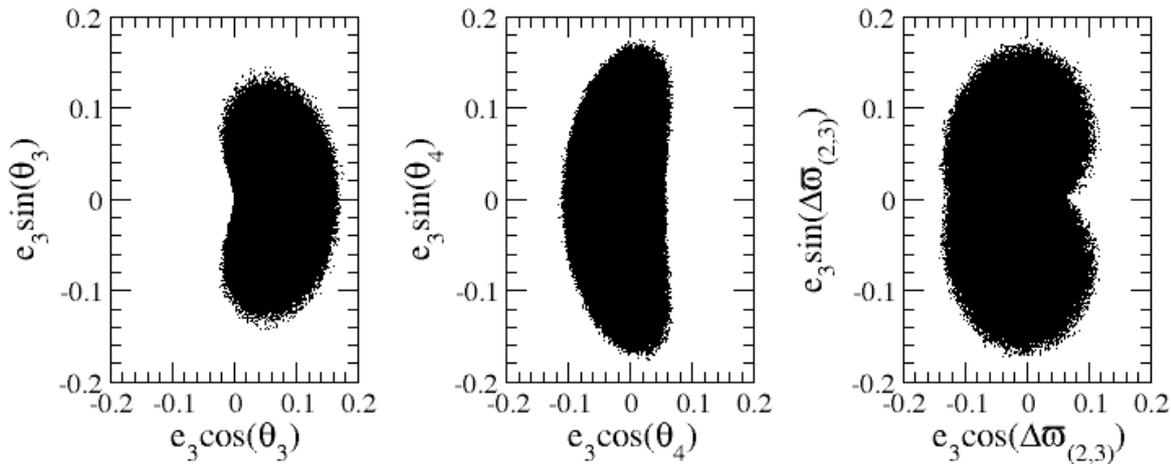


Figura 5.17: Projeção de uma trajetória integrada em  $T = 10^7$  anos, sobre o plano de fase de coordenadas polares. Para tanto, consideramos a condição inicial indicada por uma cruz verde nos mapas da Figura 5.16. Nos quadros, vemos o comportamento do sistema exibido através dos planos  $(e_3 \cos \theta_3, e_3 \sin \theta_3)$  (à esquerda),  $(e_3 \cos \theta_4, e_3 \sin \theta_4)$  (ao centro), e  $(e_3 \cos \Delta\varpi_{(2,3)}, e_3 \sin \Delta\varpi_{(2,3)})$  (à direita).

O mapa de entropia Shannon, no lado direito, caracteriza o domínio circunvizinho à

condição nominal como uma região de altos tempos de instabilidade ( $\tau_{\text{inst}} \sim 10^{10}$  anos). À luz do que obtivemos a partir dos mapas das Figuras 5.8, 5.9 e 5.15, os três painéis da Figura 5.16 parecem apontar para uma correlação entre as zonas de menor e maior oscilação do argumento  $\phi_{\text{Lap}}$ , os domínios estocásticos menos e mais caóticas, e as zonas de estabilidade de maior e menor duração, respectivamente.

O resultado obtido a partir do mapa  $\tau_{\text{inst}}(S)$  indica que o fit obtido de Millholland et al. (2018) para o sistema GJ 876 consiste em uma solução com tempo longo de estabilidade, relativamente à idade da estrela mas, por outro lado, fortemente caótica, com tempos típicos de Lyapunov inferiores a 100 anos.

Em cada painel da Figura 5.16, marcamos com um “X” verde uma condição singular, afastada da solução nominal apenas pela alteração do valor inicial da excentricidade do planeta 2. definida aqui por  $e_2 = 0.01815$ . Tal condição foi integrada por  $10^7$  anos, intervalo para o qual o sistema se comportou de maneira estável, em acordo parcial com o mapa de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  da Figura 5.16 (diz-se parcial pois somente poderíamos atestar a alta estabilidade prevista através de simulações com tempos de integração largos, tais que  $T \sim 1$  Giga-anos).

O resultado da integração está projetado nos planos polares mostrados na Figura 5.17. Neles, mostramos cada ponto obtido pela solução numérica, projetado sobre o plano  $(x, y)$ ,  $x = e_3 \cos \beta$ ,  $y = e_3 \sin \beta$ : à esquerda,  $\beta = \theta_3$ ; ao centro,  $\beta = \theta_4$ ; e à direita,  $\beta = \varpi_{(2,3)}$ .



### Conclusões

Nesta tese, apresentamos um estudo sobre a dinâmica de três sistemas exoplanetários conhecidos na literatura, a saber: HD 20003, HD 181433, e GJ 876. Consideramos os conceitos da mecânica conservativa, não levando em consideração os (possíveis) efeitos dissipativos presentes em tais problemas. As equações de movimento foram resolvidas exclusivamente via métodos computacionais, aplicando um integrador de órbitas específico (`Ncorp`). Nele, assumimos em todos os casos um referencial dado em coordenadas de Jacobi, e configurações coplanares para as órbitas.

Os objetos em questão apresentam características dimensionais bastante distintas entre si: HD 20003 é um sistema compacto de duas super-Terras, cercado por fracas RMMs de altas ordens; HD 181433 é um sistema mais amplo, com um tipo Netuno mais perto da estrela, e dois gigantes gasosos bastante afastados, e posicionados de tal forma que faz o sistema se manter na vizinhança da RMM 7:1. Esta razão de períodos também pode ser considerada uma RMM de alta ordem, mas a alta massa dos corpos externos faz com que ela seja relevante. Finalmente, GJ 876 é um sistema de muitos corpos, quatro planetas em uma arquitetura compacta, e com um intervalo de massas extenso, duas super-Terras e dois gigantes gasosos. Os três planetas mais externos definem uma cadeia ressonante, ou ressonância de Laplace, que revelou-se determinante para a estabilidade do sistema.

Os parâmetros que determinam as soluções nominais de cada sistema foram obtidos diretamente da literatura. Cada uma das soluções foi analisada quanto ao comportamento evolutivo dos elementos  $a$  (semi-eixo) e  $e$  (excentricidade). Em todos os sistemas, verificou-se evolução temporal estável por escalas de tempo de até  $6 \times 10^8$  anos. Aqui, entenda-se “estável” como a condição na qual as evoluções mostraram-se isentas de excitações em  $a$  e em  $e$  suficientemente fortes para ocasionar encontros próximos entre as órbitas, ou um

distanciamento radial intenso entre a trajetória mais externa e o corpo central, que fosse capaz de conduzir a um escape.

Utilizando mapas dinâmicos construídos a partir de grades de condições iniciais integradas numericamente, foi possível caracterizar o espaço de fase de cada sistema, para além das respectivas soluções nominais. Essa caracterização foi feita analisando o comportamento de variação da excentricidade (indicador  $\Delta e$ ), por exemplo. Usando conceitos mais específicos, analisamos também o perfil estocástico do plano de condições iniciais, aplicando determinados indicadores caóticos (MEGNO, LCE). Ao analisar o caos do sistema, foi possível entender o comportamento de forte/fraca divergência exponencial de órbitas próximas, e assim buscar correlações entre caos e instabilidade.

Boa parte do desenvolvimento do trabalho esteve focado na construção de uma ferramenta numérica para caracterização da estabilidade de sistemas planetários, recorrendo ao estudo da difusão caótica no espaço de fase das ações orbitais. Nesse intuito, fizemos uso da teoria da entropia Shannon. A construção de um método aplicável ao problema de três (e mais) corpos representou um novo passo em relação ao que já havia sido produzido e publicado na literatura, desde as aplicações de Cincotta e Giordano (2018), Giordano e Cincotta (2018) e Cincotta e Shevchenko (2020) para sistemas dinâmicos em geral (mapa *standard*, por exemplo), até o primeiro uso da entropia Shannon em Mecânica Celeste, com Beaugé e Cincotta (2019) e seus estudos do problema de três corpos restrito.

Neste trabalho, foram apresentadas as considerações fundamentais acerca da entropia Shannon, sua medição a partir da evolução orbital de um corpo, a relação entre a entropia e uma medida da difusão das ações sobre o espaço de fase e, finalmente, a associação entre um coeficiente de difusão e uma escala de tempo dentro da qual as instabilidades tendem a se manifestar macroscopicamente em dado sistema planetário. Os objetos HD 20003, HD 181433 e GJ 876 serviram como aplicações diretas, para as quais fizemos tanto os testes de validação do método, quanto um estudo propriamente direcionado para a caracterização da estabilidade através de difusão. Vale ressaltar, inclusive, que os dois primeiros sistemas constituíram, dentro da literatura, as primeiras aplicações de entropia Shannon em dinâmica planetária (Cincotta et al., 2021; Cincotta et al., 2021; Alves Silva et al., 2021), considerando o problema de três corpos. Recentemente, Kóvári et al. (2022) apresentaram uma extensão do uso do método ao problema planar de quatro corpos.

Abaixo, resumimos nossas conclusões para cada um dos objetos analisados.

- **HD 20003:** este foi o primeiro sistema planetário estudado com entropia Shannon. Verificamos que, embora relativamente próximo à RMM 3:1, os planetas não apresentam comportamento ressonante. A evolução das excentricidades mostra um movimento periódico  $\sim 2500$  anos, que constitui o período secular do sistema. A condição nominal do sistema, integrada numericamente, mostrou evolução estável por  $6 \times 10^8$  anos. Através de mapas de tempos de instabilidade ( $\tau_{\text{inst}}(S)$ ), encontramos o sistema imerso em uma região cuja estabilidade estende-se por escalas de tempo  $\gtrsim 10^9$  anos.

Realizamos testes com a ferramenta numérica que calcula a entropia Shannon, no intuito de verificar a dependências das estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  em função de determinados parâmetros. Aplicando uma coleção de testes para uma única condição inicial do plano de fase  $(a_1, e_1)$ , nossos resultados mostraram que as escalas de tempo de instabilidade são independente em relação à escolha dos parâmetros. Por outro lado, encontramos uma dispersão curiosa dos tempos de instabilidade, na forma de uma curva log-normal. O fato de que uma dispersão análoga foi obtida também através de um conjunto de simulações diretas com o `Ncorp` (obtendo assim os tempos de disrupção  $t_{\text{dis}}$ ) sugere que este é um caráter intrínseco ao movimento caótico e instável da condição inicial em questão. Entretanto, as médias (logarítmicas) para os dois conjuntos de simulações não coincidem.

Os resultados principais foram publicados como colaboração em Cincotta et al. (2021).

- **HD 181433:** este sistema fez parte do primeiro estudo publicado com uma aplicação do uso da entropia Shannon em análise de estabilidade, em Cincotta et al. (2021), e foi o objeto de estudo central no trabalho de Alves Silva et al. (2021).

A condição nominal do sistema mostrou estabilidade dentro de  $10^8$  anos, verificada por meio de simulação numérica. A evolução das excentricidade e do argumento  $\Delta\varpi$  (vide Alves Silva et al. (2021) para este último) mostraram um período secular de  $\approx 10^5$  anos.

Os mapas de tempos de instabilidade mostraram que o sistema é caracterizado por difusão lenta, o que implica em longas escalas de tempo de instabilidade. Tais escalas respeitam e implementam os resultados obtidos através das simulações diretas de

Horner et al. (2019). A larga estabilidade do domínio dentro do qual encontra-se o sistema ocorre apesar da caoticidade que ali também foi observada. Verificamos que o caos local está associado à proximidade da RMM 7:1: o sistema está próximo ao ponto de superposição de duas ilhas desta ressonância.

Analisando um extenso conjunto de condições iniciais tomadas de um segmento do semi-eixo externo ( $a_2$ ), encontramos um bom acordo entre  $t_{\text{dis}}$  e as estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$ . O método demonstrou limitações quando aplicado a regiões mais complexas, no caso, a separatriz da RMM 4:1. Ali, fenômenos de transporte devem afastar a dinâmica da ergodicidade, levando o sistema de uma difusão normal para uma difusão anômala (subdifusão ou superdifusão).

A comparação entre mapas dinâmicos de caos (construídos com o MEGNO, por exemplo) e os mapas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  mostram que existem informações complementares, em cada método. O MEGNO, assim como o LCE, é útil para separar os domínios regulares e caóticos do espaço de fase, mas nenhum deles é capaz de fornecer informações acerca da velocidade da difusão caótica nesse espaço. Esta última pode ser acessada através da metodologia Shannon.

Outros pontos de destaque são as comparações estatísticas que contruímos, através dos diagramas de correlação ( $\tau_{\text{inst}}(S), t_{\text{dis}}$ ), para condições particulares tomadas do plano de fase do sistema. Obtivemos acordos razoáveis, com exceção do caso em que a solução encontra-se na região de suposta difusão anômala, imersa no domínio da separatriz da RMM 4:1. À semelhança do que obtivemos para o sistema HD 20003, também aqui as distribuições de tempos mostraram uma configuração do tipo log-normal.

- **GJ 876:** nosso estudo sobre a dinâmica deste sistema foi mais aprofundado, relativamente aos demais objetos da tese. Verificamos que as soluções mais antigas da literatura apresentam resultados equivalentes à condição nominal atualmente adotada para o sistema. De maneira geral, trata-se de uma configuração fortemente caótica, com tempos de Lyapunov que não superam a casa dos 100 anos, ou seja, o caos se manifesta muito rapidamente. Não obstante, foi possível provar que a condição nominal do sistema mostra um comportamento estável por  $\sim 5 \times 10^8$  anos, com variações limitadas das variáveis e dos argumentos orbitais, o que sugere que

a arquitetura pode se manter (gravitacionalmente) coesa por tempos ainda maiores, talvez comparáveis com a idade da estrela central.

Em acordo com os trabalhos anteriores, determinamos que o sistema apresenta uma configuração de dupla ressonância, uma cadeia de RMMs de razões 4:2:1, formando uma ressonância de Laplace. Verificamos que, dentro de  $10^8$  anos, o argumento principal da ressonância,  $\phi_{\text{Lap}}$ , oscila com amplitudes limitadas a  $\sim 80$  graus. Outros argumentos próprios das relações de comensurabilidades também apresentam movimento de oscilação perene. Por outro lado, não conseguimos confirmar as afirmações de Millholland et al. (2018), acerca de um núcleo ressonante no qual ocorre uma dupla co-rotação dos argumentos  $\Delta\varpi_{(1,2)}$  e  $\Delta\varpi_{2,3}$ . O que obtivemos, de fato, através de integrações projetadas sobre os planos de coordenadas polares, é que o argumento  $\Delta\varpi_{(2,3)}$  executa circulações, que ocorrem de forma síncrona com os instantes em que a excentricidade  $e_3$  aproxima-se de zero.

A forte caoticidade verificada nos planos de fase das condições iniciais, entretanto, não está correlacionada à uma difusão caótica intensa. Os mapas de tempos de instabilidade indicaram que o domínio da ressonância de Laplace apresenta altas escalas de tempo para a manifestação das instabilidades, de ordens superiores à (suposta) idade do sistema. O que leva a crer que a difusão ocorra de maneira densa, isto é, as ações orbitais se difundem rapidamente sobre o plano de fase (o caos é rápido), mas o fazem sobre uma extensão limitada do plano, o que faz com que a entropia  $S$  não apresente crescimento monotônico, e os níveis de difusividade tornam-se baixos (ou seja, altos  $\tau_{\text{inst}}(S)$ ). Neste caso, tal comportamento poderia configurar um exemplo do chamado caos confinado. No entanto, um estudo mais direcionado a este aspecto é necessário, antes de qualquer assertividade.

Comparações entre as estimativas de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e integrações diretas mostraram acordos razoáveis, para o domínio ressonante. As regiões externas, que são estáveis, mostraram desacordos pontuais que ainda não somos capazes de explicar e corrigir.

Como último comentário sobre o presente trabalho, acreditamos que a combinação de diferentes técnicas de estudo é capaz de oferecer um cenário mais completo, ao investigar-se a dinâmica de dado sistema planetário. Um retrato mais geral das estruturas de fase pode ser acessado por qualquer indicador de caos, dentre os vários que são facilmente

encontrados na literatura. Assim, é possível acessar a informação da existência de domínios regulares, quasi-periódicos e caóticos. Mas indicadores de caos não distinguem caos estável de caos instável, e nesse sentido, a entropia Shannon surge como uma opção complementar à análise, capaz de medir as taxas de tempo dentro das quais as instabilidades macroscópicas tendem a manifestar-se nos domínios caóticos. Além disso, a difusão pode ser analisada individualmente, para cada corpo que compõe o sistema, de tal forma que é possível analisar quais órbitas executam um papel-chave no processo difusivo.

O contínuo refinamento do método, é claro, é de suma necessidade.

## Referências Bibliográficas

- Agol E., Dorn C., Grimm S. L., Turbet M., Ducrot E., Delrez L., Gillon M., Demory B.-O., Burdanov Artem e. a., Refining the Transit-timing and Photometric Analysis of TRAPPIST-1: Masses, Radii, Densities, Dynamics, and Ephemerides, , 2021, vol. 2, p. 1
- Alves A. J., Michtchenko T. A., Tadeu dos Santos M., Dynamics of the 3/1 planetary mean-motion resonance: an application to the HD60532 b-c planetary system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2016, vol. 124, p. 311
- Alves Silva R., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Cincotta P. M., Giordano C. M., Instability times in the HD 181433 exoplanetary system, *A&A*, 2021, vol. 652, p. A112
- Baluev R. V., Orbital structure of the GJ876 extrasolar planetary system based on the latest Keck and HARPS radial velocity data, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, vol. 111, p. 235
- Barnes R., , 2011 Laplace Resonance. Springer Berlin Heidelberg Berlin, Heidelberg pp 905–906
- Barnes R., Greenberg R., Stability Limits in Extrasolar Planetary Systems, *ApJ*, 2006, vol. 647, p. L163
- Batygin K., Deck K. M., Holman M. J., Dynamical Evolution of Multi-resonant Systems: The Case of GJ876, *AJ*, 2015, vol. 149, p. 167
- Beaugé C., Cincotta P. M., Shannon entropy applied to the planar restricted three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2019, vol. 131, p. 52

- Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., , 2007 Planetary Masses and Orbital Parameters from Radial Velocity Measurements. p. 1
- Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Multi-planet extrasolar systems — detection and dynamics, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 2012, vol. 12, p. 1044
- Beaugé C., Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance, *MNRAS*, 2006, vol. 365, p. 1160
- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M., Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, p. 9
- Bouchy F., Mayor M., Lovis C., Udry S., Benz W., Bertaux J. L., Delfosse X., Mordasini C., Pepe F., Queloz D., Segransan D., The HARPS search for southern extra-solar planets. XVII. Super-Earth and Neptune-mass planets in multiple planet systems HD 47 186 and HD 181 433, *A&A*, 2009, vol. 496, p. 527
- Campanella G., Treating dynamical stability as an observable: a 5:2 mean motion resonance configuration for the extrasolar system HD 181433, *MNRAS*, 2011, vol. 418, p. 1028
- Cincotta P., Shevchenko I., Correlations in area preserving maps: A Shannon entropy approach, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2020, vol. 402, p. 132235
- Cincotta P. M., Giordano C. M., Phase correlations in chaotic dynamics: a Shannon entropy measure, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, p. 74
- Cincotta P. M., Giordano C. M., Alves Silva R., Beaugé C., The Shannon entropy: An efficient indicator of dynamical stability, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021, vol. 417, p. 132816
- Cincotta P. M., Giordano C. M., Silva R. A., Beaugé C., Shannon entropy diffusion estimates: sensitivity on the parameters of the method, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2021, vol. 133, p. 7
- Cincotta P. M., Simó C., Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I, *A&AS*, 2000, vol. 147, p. 205

- Contopoulos G., Order and chaos in dynamical astronomy, 2002
- Correia A. C. M., Couetdic J., Laskar J., Bonfils X., Mayor M., Bertaux J. L., Bouchy F., Delfosse X., Forveille T., Lovis C., Pepe F., Perrier C., Queloz D., Udry S., The HARPS search for southern extra-solar planets. XIX. Characterization and dynamics of the GJ 876 planetary system, *A&A*, 2010, vol. 511, p. A21
- Correia A. C. M., Udry S., Mayor M., Laskar J., Naef D., Pepe F., Queloz D., Santos N. C., The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD 202206 or a circumbinary planet?, *A&A*, 2005, vol. 440, p. 751
- Dawson R. I., , 2018 in Deeg H. J., Belmonte J. A., eds, , Handbook of Exoplanets. p. 114
- Dawson R. I., Johnson J. A., Origins of Hot Jupiters, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 2018, vol. 56, p. 175
- Delfosse X., Forveille T., Mayor M., Perrier C., Naef D., Queloz D., The closest extrasolar planet. A giant planet around the M4 dwarf GL 876, *A&A*, 1998, vol. 338, p. L67
- Desort M., Lagrange A.-M., Galland F., Beust H., Udry S., Mayor M., Lo Curto G., Extrasolar planets and brown dwarfs around A-F type stars. V. A planetary system found with HARPS around the F6IV-V star HD 60532, *A&A*, 2008, vol. 491, p. 883
- Dvorak R., Pilat-Lohinger E., Schwarz R., Freistetter F., Extrasolar Trojan planets close to habitable zones, *A&A*, 2004, vol. 426, p. L37
- Ferraz-Mello S., Dynamics of the Galilean satellites., 1979
- Ferraz-Mello S., ed., 2007 Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library*
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., , 2005 *Extrasolar Planetary Systems*. pp 219–271
- Franklin F., Lecar M., Murison M., Chaotic Orbits and Long Term Stability: an Example From Asteroids of the Hilda Group, *AJ*, 1993, vol. 105, p. 2336
- Gallardo T., Beaugé C., Giuppone C. A., Semianalytical model for planetary resonances. Application to planets around single and binary stars, *A&A*, 2021, vol. 646, p. A148

- Gillon M., Demory B. O., Lovis C., Deming D., Ehrenreich D., Lo Curto G., Mayor M., Pepe F., Queloz D., Seager S., Ségransan D., Udry S., The Spitzer search for the transits of HARPS low-mass planets. II. Null results for 19 planets, *A&A*, 2017, vol. 601, p. A117
- Gillon M., Triaud A. H. M. J., Demory B., Jehin E., Agol E., Deck K. M., Lederer S. M., de Wit J., Burdanov A., Ingalls J. G., Bolmont E., Leconte J., Raymond S. N., Selsis F., Turbet M. e. a., Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1, *Nature*, 2017, vol. 542, p. 456
- Giordano C. M., Cincotta P. M., The Shannon entropy as a measure of diffusion in multi-dimensional dynamical systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, p. 35
- Gladman B., Dynamics of Systems of Two Close Planets, *Icarus*, 1993, vol. 106, p. 247
- Harrington R. S., The Stellar Three-Body Problem, *Celestial Mechanics*, 1969, vol. 1, p. 200
- Henry T. J., McCarthy Donald W. J., The Mass-Luminosity Relation for Stars of Mass 1.0 to 0.08M(solar), *AJ*, 1993, vol. 106, p. 773
- Horner J., Wittenmyer R. A., Wright D. J., Hinse T. C., Marshall J. P., Kane S. R., Clark J. T., Mengel M., Agnew M. T., Johns D., The HD 181433 Planetary System: Dynamics and a New Orbital Solution, *AJ*, 2019, vol. 158, p. 100
- Hussain N., Tamayo D., Fundamental limits from chaos on instability time predictions in compact planetary systems, *MNRAS*, 2020, vol. 491, p. 5258
- Kővári E., Érdi B., Sándor Z., Application of the Shannon entropy in the planar (non-restricted) four-body problem: the long-term stability of the Kepler-60 exoplanetary system, *MNRAS*, 2022, vol. 509, p. 884
- Lagerkvist C.-I., Erikson A., Lahulla F., De Martino M., Nathues A., Dahlgren M., A Study of Cybele Asteroids: I. Spin Properties of Ten Asteroids, *Icarus*, 2001, vol. 149, p. 190
- Laskar J., A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System, *Nature*, 1989, vol. 338, p. 237

- Laskar J., The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, 1990, vol. 88, p. 266
- Laskar J., Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, vol. 67, p. 257
- Laskar J., Correia A. C. M., HD 60532, a planetary system in a 3:1 mean motion resonance, *A&A*, 2009, vol. 496, p. L5
- Lecar M., Franklin F., Murison M., On Predicting Long-Term Orbital Instability: A Relation Between the Lyapunov Time and Sudden Orbital Transitions, *AJ*, 1992, vol. 104, p. 1230
- Leleu A., Alibert Y., Hara N. C., Hooton M. J., Wilson T. G., Robutel P., Delisle J. B., Laskar J., Hoyer S., Lovis C., Bryant E. M. e. a., Six transiting planets and a chain of Laplace resonances in TOI-178, *A&A*, 2021, vol. 649, p. A26
- Lichtenberg A., Lieberman M., *Regular and Chaotic Dynamics*, 1992
- Lyapunov A. M., The general problem of the stability of motion, *International Journal of Control*, 1992, vol. 55, p. 531
- Marchal C., Bozis G., Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem, *Celestial Mechanics*, 1982, vol. 26, p. 311
- Marchal C., Saari D. G., Hill Regions for the General Three-Body Problem, *Celestial Mechanics*, 1975, vol. 12, p. 115
- Marcy G. W., Butler R. P., Fischer D., Vogt S. S., Lissauer J. J., Rivera E. J., A Pair of Resonant Planets Orbiting GJ 876, *ApJ*, 2001, vol. 556, p. 296
- Marcy G. W., Butler R. P., Vogt S. S., Fischer D., Lissauer J. J., A Planetary Companion to a Nearby M4 Dwarf, Gliese 876, *ApJ*, 1998, vol. 505, p. L147
- Marcy G. W., Butler R. P., Williams E., Bildsten L., Graham J. R., Ghez A. M., Jernigan J. G., The Planet around 51 Pegasi, *ApJ*, 1997, vol. 481, p. 926
- Martí J. G., Cincotta P. M., Beaugé C., Chaotic diffusion in the Gliese-876 planetary system, *MNRAS*, 2016, vol. 460, p. 1094

- Martí J. G., Giuppone C. A., Beaugé C., Dynamical analysis of the Gliese-876 Laplace resonance, *MNRAS*, 2013, vol. 433, p. 928
- Marzari F., Dynamical behaviour of multiplanet systems close to their stability limit, *MNRAS*, 2014, vol. 442, p. 1110
- Marzari F., Weidenschilling S. J., Eccentric Extrasolar Planets: The Jumping Jupiter Model, *Icarus*, 2002, vol. 156, p. 570
- Mayor M., Marmier M., Lovis C., Udry S., Ségransan D., Pepe F., Benz W., Bertaux J. L., Bouchy F., Dumusque X., Lo Curto G., Mordasini C., Queloz D., Santos N. C., The HARPS search for southern extra-solar planets XXXIV. Occurrence, mass distribution and orbital properties of super-Earths and Neptune-mass planets, arXiv e-prints, 2011, p. arXiv:1109.2497
- Mayor M., Queloz D., A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 1995, vol. 378, p. 355
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - I. Systems with a more massive outer planet, *MNRAS*, 2008a, vol. 387, p. 747
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet, *MNRAS*, 2008b, vol. 391, p. 215
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Comparative study of the asteroidal motion in the 3:2 and 2:1 resonances with Jupiter. I. Planar model., *A&A*, 1995, vol. 303, p. 945
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, *Icarus*, 2001, vol. 149, p. 357
- Milani A., Nobili A. M., An example of stable chaos in the Solar System, *Nature*, 1992, vol. 357, p. 569
- Milani A., Nobili A. M., Asteroid 522 Helga is Chaotic and Stable, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1993, vol. 56, p. 323

- 
- Millholland S., Laughlin G., Teske J., Butler R. P., Burt J., Holden B., Vogt S., Crane J., Shectman S., Thompson I., New Constraints on Gliese 876—Exemplar of Mean-motion Resonance, *AJ*, 2018, vol. 155, p. 106
- Morbidelli A., Froeschlé C., On the Relationship Between Lyapunov Times and Macroscopic Instability Times, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1996, vol. 63, p. 227
- Murray C. D., Dermott S. F., *Solar System Dynamics*, 2000
- Nelson B. E., Robertson P. M., Payne M. J., Pritchard S. M., Deck K. M., Ford E. B., Wright J. T., Isaacson H. T., An empirically derived three-dimensional Laplace resonance in the Gliese 876 planetary system, *MNRAS*, 2016, vol. 455, p. 2484
- Newton I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Auctore Js. Newton, 1687
- Perryman M. A. C., Extra-solar planets, *Reports on Progress in Physics*, 2000, vol. 63, p. 1209
- Petit A., Spacing and stability of compact systems. In *Plato Mission Conference 2021*. Presentations and posters of the online PLATO Mission Conference 2021 , 2021, p. 107
- Poincaré H., *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, 1899
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN; The Art of Scientific Computing 2nd edn*. Cambridge University Press New York, NY, USA, 1993
- Ramos X. S., Correa-Otto J. A., Beaugé C., The resonance overlap and Hill stability criteria revisited, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2015, vol. 123, p. 453
- Rice D. R., Rasio F. A., Steffen J. H., Survival of non-coplanar, closely packed planetary systems after a close encounter, *MNRAS*, 2018, vol. 481, p. 2205
- Rivera E. J., Laughlin G., Butler R. P., Vogt S. S., Haghighipour N., Meschiari S., The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: a Uranus-Mass Fourth Planet for GJ 876 in an Extrasolar Laplace Configuration, *ApJ*, 2010, vol. 719, p. 890

- Rivera E. J., Lissauer J. J., Butler R. P., Marcy G. W., Vogt S. S., Fischer D. A., Brown T. M., Laughlin G., Henry G. W., A  $\sim 7.5 M_{\oplus}$  Planet Orbiting the Nearby Star, GJ 876, *ApJ*, 2005, vol. 634, p. 625
- Roig F., Ferraz-Mello S., A symplectic mapping approach of the dynamics of the Hecuba gap, *Planet. Space Sci.*, 1999, vol. 47, p. 653
- Sessin W., Ferraz-Mello S., Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2:1 solutions of the hori auxiliary system, *Celestial Mechanics*, 1984, vol. 32, p. 307
- Shannon C. E., Weaver W., *The mathematical theory of communication*, 1949
- Sinclair A. T., The orbital resonance amongst the Galilean satellites of Jupiter., *MNRAS*, 1975, vol. 171, p. 59
- Skokos C., , 2010 in Souchay J., Dvorak R., eds, , Vol. 790, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. pp 63–135
- Trevisan M., Barbuy B., Eriksson K., Gustafsson B., Grenon M., Pompéia L., Analysis of old very metal rich stars in the solar neighbourhood, *A&A*, 2011, vol. 535, p. A42
- Tsiganis K., Varvoglis H., Hadjidemetriou J. D., Stable Chaos in the 12:7 Mean Motion Resonance and Its Relation to the Stickiness Effect, *Icarus*, 2000, vol. 146, p. 240
- Udry S., Dumusque X., Lovis C., Ségransan D., Diaz R. F. e. a., The HARPS search for southern extra-solar planets. XLIV. Eight HARPS multi-planet systems hosting 20 super-Earth and Neptune-mass companions, *A&A*, 2019, vol. 622, p. A37
- von Braun K., Boyajian T. S., van Belle G. T., Kane S. R., Jones J., Farrington C., Schaefer G., Vargas N., Scott N., ten Brummelaar T. A., Kephart M. e. a., Stellar diameters and temperatures - V. 11 newly characterized exoplanet host stars, *MNRAS*, 2014, vol. 438, p. 2413
- Wehrl A., General properties of entropy, *Rev. Mod. Phys.*, 1978, vol. 50, p. 221
- Wolszczan A., Frail D. A., A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12, *Nature*, 1992, vol. 355, p. 145

Zuckerman B., Recognition of the First Observational Evidence of an Extrasolar Planetary System. In 19th European Workshop on White Dwarfs , vol. 493 of Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 2015, p. 291



# Apêndice



## Entropia Shannon

### A.1 Medição da entropia $S$

A entropia Shannon  $S$  é tomada em termos das variáveis de fase do sistema dinâmico. Nas aplicações aos problemas planetários apresentadas em Cincotta et al. (2021), Cincotta et al. (2021) e Alves Silva et al. (2021),  $S$  é definida em função de pseudo-ações,  $(I, J) = (a, a(1 - e^2))$ , dependentes dos elementos orbitais principais, semi-eixo e excentricidade. Ao longo desses estudos, os autores mostram que  $a$  e  $e$  carregam informação sobre o comportamento dinâmico do sistema em diferentes escalas de tempo, e de forma correspondente às ações clássicas de Delaunay,  $(\Lambda, \Gamma)$ . Aplicar  $I \sim \Lambda^2$  e  $J \sim \Gamma^2$ , nesse caso, também está relacionado à uma questão dimensional do problema, ao se calcular a taxa de difusão de um processo dinâmico através da entropia Shannon.

Seja tomada determinada trajetória  $\varphi(t)$ , solução das equações de movimento de um dado sistema planetário ( $N_p > 1$ ). Então,  $\varphi(t)$  é mapeada sobre o espaço de fase  $(I, J)$ . Em um domínio fechado  $\mathcal{C}$  do espaço  $(I, J)$ , define-se uma partição  $\mathcal{P}(\Sigma, q) = \{c_i, 1 \leq i \leq q\}$ , formada por  $q$  elementos  $c_i$ , separáveis entre si (isto é, distinguíveis). Cada elemento  $c_i$  define uma célula da partição.

A partição (retangular)  $\mathcal{P}(\Sigma, q)$  é centrada no ponto definido pelas condições iniciais  $(I_0, J_0)$  de  $\varphi(t)$ , e consiste de  $q = q_I \times q_J$  células bidimensionais que preenchem uma região de área  $\Sigma$  do espaço de fase, cujas dimensões são dadas por  $\Sigma = [-\Delta I, \Delta I] \times [-\Delta J, \Delta J]$ . Assim, é fácil ver que  $2\Delta I$  e  $2\Delta J$  delimitam os comprimentos do retângulo dentro do qual  $\mathcal{P}$  é construída.

Para tempos discretos  $t$  tais que  $0 \leq t \leq T$ , sendo  $T$  o tempo total da integração numérica, o número de pontos integrados será uma função monotônica do tempo, dada

por  $Z(t) = t/h$ , onde  $h$  é a taxa de amostragem (tempo de saída dos dados). Cada ponto integrado  $(I(t), J(t))$  pode então ser mapeado sobre o plano de fase, e definimos  $n_k(t)$  como a quantidade de vezes na qual as variáveis  $(I(t), J(t))$  “preenchem” a  $k$ -ésima célula da partição  $\mathcal{P}(\Sigma, q)$ , sendo  $q_0 \leq q$  o número total de células preenchidas ao longo da integração completa. A entropia Shannon  $S(\varphi, Z)$  de uma trajetória  $\varphi$  pode, então, ser escrita como

$$S(\varphi, Z) = \ln Z - \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{q_0} n_k \ln n_k, \quad (\text{A.1})$$

conforme mostrado em Cincotta e Giordano (2018), Giordano e Cincotta (2018) e Cincotta e Shevchenko (2020). Perceba que  $S$  é uma função limitada, e para uma dada partição  $\mathcal{P}(\Sigma, q)$ ,  $0 \leq S \leq \ln q_0$ . O limite inferior é verificável no caso em que os valores de fase  $(I(t), J(t))$  preenchem uma única célula da partição, e as demais  $q - 1$  células permanecem “vazias” em  $t \leq T$ . Neste caso, tem-se uma órbita estacionária do espaço de fase, e.g. o ponto  $\theta = [0, \text{mod}(2\pi)]$  do problema do pêndulo simples.

Por outro lado, o limite superior ocorrerá quando  $n_k = Z/q, \forall k \in [1, q]$ : as variáveis de fase preenchem a partição em uma distribuição uniforme, ou seja, cada célula é ocupada o mesmo número de vezes. Dentro da área sobre a qual o movimento se difunde, o limite máximo para o valor de  $S$  corresponde ao que se conhece por um regime dinâmico ergódico. O movimento Browniano constitui um exemplo simples para um regime ergódico.

A expressão (A.1) é a forma exata aplicada na computação da entropia Shannon  $S$ , dentro da rotina `Ncorp`.

#### A.1.0.1 Fronteiras da partição $\mathcal{P}(\Sigma, q)$

A formulação da metodologia Shannon possui ao menos dois parâmetros livres e independentes do processo de integração das equações de movimento: a área  $\Sigma = 4\Delta I \Delta J$  que define a partição sobre o espaço de fase, e o número total de células,  $q$ , que compõem tal partição.

Com relação ao parâmetro de área  $\Sigma$ , determinamos  $\Delta I$  e  $\Delta J$  com base no critério de estabilidade de Hill (Perryman, 2000; Barnes e Greenberg, 2006). Impomos uma distância mínima  $\Delta_{\min} = 2\sqrt{R_{\text{Hill}}^{(i,j)}}$ , onde

$$R_{\text{Hill}}^{(i,j)} = \frac{(a_i + a_j)}{2} \left[ \frac{m_i + m_j}{3m_0} \right]^{1/3} \quad (\text{A.2})$$

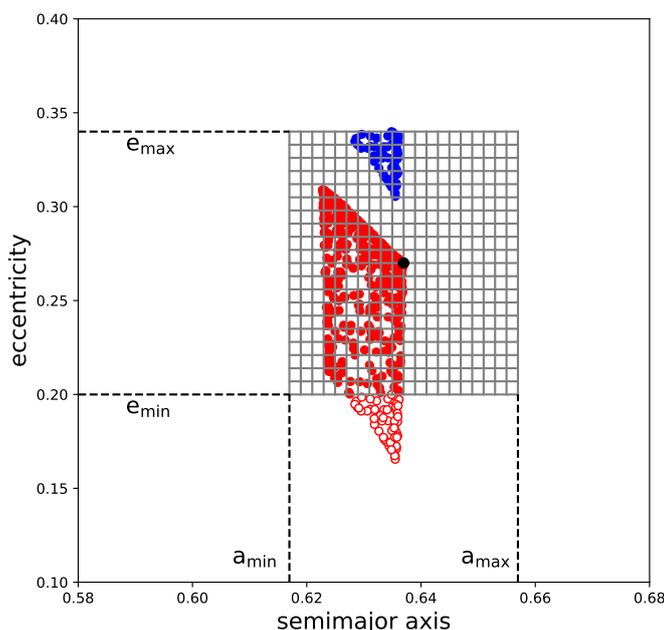


Figura A.1: Ilustração de uma partição considerando o plano de fase genérico  $(a, e)$ . As regiões coloridas emulam os valores de fase da trajetória que vão, ao longo do tempo, preenchendo as células da partição. Os círculos preenchidos de cor vermelha representam pontos que povoam o interior da caixa de partição. Os círculos abertos de contorno vermelho são pontos da trajetória que “caem” em região externas aos limites da partição, enquanto os pontos preenchidos em azul esquematizam o processo de reinserção destes últimos de volta para a partição. O ponto preto ao centro representa a condição inicial,  $(a_0, e_0)$ .

designa o raio de Hill mútuo do par de órbitas adjacente  $(i, j)$  (Marzari e Weidenschilling, 2002). A expressão para  $\Delta_{\min}$  é igual à mínima distância entre planetas de órbitas circulares e estáveis, segundo o senso de estabilidade de Hill, e conforme derivado pelos trabalhos de Marchal e Saari (1975) e Marchal e Bozis (1982), e mais tarde “popularizado” por Gladman (1993). Em Marzari (2014),  $\Delta_{\min}$  é estabelecido como uma aproximação para o valor limítrofe de transição entre órbitas estáveis em escalas de tempo de bilhões de anos, e as órbitas instáveis em tempos inferiores. Embora seja questionável o uso de  $\Delta_{\min}$  como uma critério sólido de limite de estabilidade para sistemas multiplanetários de órbitas excêntricas, é consensual que sua aplicação constitui uma aproximação de concordância bastante razoável quando comparada a simulações numéricas de  $N$ -corpos. Além disso, no contexto da abordagem Shannon,  $\Delta_{\min}$  é aplicado em um sentido menos rigoroso.

Uma vez estipulado o valor  $\Delta_{\min}$ , definimos limites  $(\Delta a, \Delta e)$  em semi-eixo e excentricidade tais que tenhamos uma caixa retangular de lados  $\Delta a \times \Delta e$ , centrada nos valores iniciais da trajetória,  $(a_0, e_0)$ . Tomamos  $\Delta a = \Delta_{\min}$ , e  $\Delta e = 0.5$ , sendo os casos singulares

$e_0 + \Delta e > 1$  e  $e_0 - \Delta e < 0$  evitados por condições internas da rotina. Nesta aplicação,  $\Delta_{\min}$  não determina, necessariamente, a fronteira entre órbitas instáveis e estáveis, mas constitui simplesmente um limite teórico para as fronteiras da caixa na direção do semi-eixo. Os valores de fase integrados  $a(t)$  que ocasionalmente superam tal limite não implicam em tempos de instabilidade mais curtos que soluções que permanecem dentro da caixa durante o intervalo de simulação  $T$ . Obviamente, isso está muito mais associado à velocidade com que o “escape” da caixa ocorre (e essa velocidade correlaciona-se diretamente à taxa de difusão da trajetória).

A Figura A.1 ilustra esquematicamente o domínio da partição sobre o espaço de fase  $(a, e)$ , e a forma como os pontos da trajetória integrada preenchem o subespaço definido pela partição, inclusive nas situações em que os limites da caixa acabam superados pelos valores de fase da integração, porém sem resultar, necessariamente, em um cenário de disrupção. Nestes casos, os respectivos pontos podem ser reintroduzidos ao domínio da partição através de condições periódicas de modulação (Beaugé e Cincotta, 2019).

Mais tarde, os respectivos valores de  $\Delta a$  e  $\Delta e$  são usados para obter as dimensões da caixa de partição em termos das pseudo-ações, ou seja,  $\Delta I$  e  $\Delta J$ . É dentro do espaço particionado sobre o plano  $(I, J)$  que a probabilidade de ocupação da  $k$ -ésima célula,  $\mu_k$ , e a quantidade  $q_0(t)$  de células ocupadas, são computadas (Cincotta e Giordano, 2018; Giordano e Cincotta, 2018; Cincotta e Shevchenko, 2020). Além disso, é importante compreender que a partição é construída em todos os  $N_p$  planos de fase  $(I, J)$  correspondentes a cada trajetória que é integrada.

Devido a restrições computacionais, o número limite de células, dentro da rotina numérica construída para computar  $S$  a partir da evolução temporal de sistemas de  $N$ -corpos, é dado por  $q = 1600 \times 1600$ . Entretanto, é importante salientar que a análise estatística do comportamento dinâmico dos sistemas é implementada com a aplicação de *ensembles* de trajetórias. O uso de ensembles consiste em tomar-se conjuntos de “sistemas-fantasmas”, ou órbitas “tipo sombra”, obtidas ao deslocar-se uma distância “infinitesimal” em relação aos valores nominais  $(a_i, e_i)$  de uma dada condição inicial, para cada um dos corpos do sistema. Tais órbitas são resolvidas simultaneamente à solução original, sendo o valor de  $S$  (e, conseqüentemente, de  $D_S$ ) ponderado, ao final, pelo número de componentes  $n_{\text{ens}}$  do ensemble.

### A.1.0.2 Aproximação ergódica

De maneira menos rigorosa, entende-se por *ergódico* um regime de movimento no qual a trajetória  $\varphi(t)$  passa próximo a vizinhança de todo ponto da superfície de energia (*invariant manifold*) sobre a qual o movimento ocorre (Contopoulos, 2002). Em tal configuração, as variáveis de fase tendem a preencher densa e uniformemente o domínio do espaço de fase. O movimento Browniano, caracterizado fundamentalmente por estocasticidade (*random walk*), constitui um exemplo fundamental de um regime ergódico.

Admitindo que a partição  $\mathcal{P}(\Sigma, q)$  é fina o suficiente (em geral, isto significa dizer que o número  $q$  de células é suficientemente grande), e que a quantidade de pontos integrados  $Z$  é alta (i.e.,  $T$  é longo e  $h$  é suficientemente pequeno), tal que  $Z > q$ , é possível assumir que a trajetória  $\varphi$  se comportará de maneira aproximadamente ergódica no limite em que  $t$  se aproxima de  $T$ . Os elementos (células) não-vazios da partição terão aproximadamente a mesma medida (peso),  $1/q_0$ , e nesse caso as distribuições  $n_k$  sobre cada elemento da partição serão aproximadamente Poissonianas, isto é, aleatórias (Cincotta e Giordano, 2018; Cincotta e Shevchenko, 2020). Seja  $\psi$  o valor médio da distribuição  $n_k$  tal que  $\psi = Z/q_0 \gg 1$ , é possível então escrever  $n_k = \psi + \xi_k$ , onde  $|\xi_k| \ll \psi$  designa a flutuação em torno de  $\psi$ . O termo da somatória na Equação (A.1) é expansível em uma série de Taylor à ordem  $\mathcal{O}((\xi_k/\psi)^2)$ , tal que

$$\sum_{k=1}^{q_0} n_k \ln n_k = Z \ln Z - Z \ln q_0 + \frac{1}{2\psi} \sum_{k=1}^{q_0} \xi_k^2 + \mathcal{O}((\xi_k/\psi)^3), \quad (\text{A.3})$$

e substituindo na Equação (A.1), obtém-se

$$S(\gamma, Z) \approx \ln q_0 - \frac{q_0}{2Z^2} \sum_{k=1}^{q_0} \xi_k^2. \quad (\text{A.4})$$

Em distribuições Poissonianas, as flutuações  $\xi_k$  obedecem uma distribuição normal (Cincotta e Shevchenko, 2020), de valor médio 0 e desvio padrão  $\vartheta = \sqrt{\psi}$ , de tal modo que a variância, definida como  $\vartheta^2$ , resultará em

$$\frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{q_0} \xi_k^2 = \psi, \quad (\text{A.5})$$

e em um cenário de regime puramente estocástico  $\varphi_e$ , a entropia Shannon  $S$  reduzir-se-á a

$$S(\varphi_e, Z) \approx \ln q_0 - \frac{1}{2\psi}. \quad (\text{A.6})$$

Por hipótese inicial,  $\psi \gg 1$ , e assim chegamos à aproximação final  $S_0$  para a entropia Shannon de um processo estocástico:

$$S(\varphi_e, \mathbf{Z}) \approx S_0 \equiv \ln q_0. \quad (\text{A.7})$$

Em um processo  $\varphi_{ne}$  caótico, mas não puramente aleatório (ou seja, não necessariamente browniano), vamos supor que  $n_k = \psi + \tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\xi} \ll \psi$ , e voltando a (A.4), escrevemos

$$S(\varphi_{ne}, \mathbf{Z}) \approx \ln q_0 - \frac{q_0}{2Z^2} \sum_{k=1}^{q_0} \tilde{\xi}_k^2. \quad (\text{A.8})$$

Seja definida uma função genérica  $g(\psi)$ , tal que

$$\sum_{k=1}^{q_0} \tilde{\xi}_k^2 = g(\psi) \sum_{k=1}^{q_0} \xi_k^2. \quad (\text{A.9})$$

Diretamente de (A.5) vem que

$$g(\psi) = \frac{1}{\psi} \langle \tilde{\xi}_k^2 \rangle \quad \langle \tilde{\xi}_k^2 \rangle = \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{q_0} \tilde{\xi}_k^2. \quad (\text{A.10})$$

De (A.4), (A.8) e (A.9) obtemos

$$|S(\varphi_{ne}, \mathbf{Z}) - \ln q_0| \approx \frac{g(\psi)}{2\psi} = \frac{\langle \tilde{\xi}_k^2 \rangle}{2\psi^2}. \quad (\text{A.11})$$

Nesse sentido, a equação (A.11) expressa o desvio esperado entre a medida teórica de  $S$ , obtida aplicando a expressão completa (A.1), e a aproximação ergódica  $S_0$  de (A.7).

De forma mais generalizada (e, assim, mais simples), a expressão geral para a entropia Shannon de um processo dinâmico, estocástico ou não, pode ser definida conforme segue:

$$S(\varphi, \mathbf{Z}) \approx \ln q_0 - \frac{q_0}{2Z^2} \sum_{i=1}^{q_0} (n_i(\mathbf{Z}) - \langle n_i(\mathbf{Z}) \rangle)^2, \quad (\text{A.12})$$

onde, sumariamente, o termo  $\ln q_0$  designa o número de células ocupadas, e o termo dentro do somatório é uma medida de desvio, associado à distribuição de ocupação dentro da população  $q_0$  de células preenchidas. Em outras palavras, essa parcela mede o quanto o processo de ocupação de cada célula desvia-se de uma distribuição normal, no qual toda célula ocupada é povoada, aproximadamente, o mesmo número de vezes pelas variáveis de fase  $(I(t), J(t))$ .

A Equação (A.12) define uma aproximação para o cálculo da entropia  $S$ . Recordamos que, na rotina aplicada em nosso estudo,  $S$  é computada usando a forma exata dada

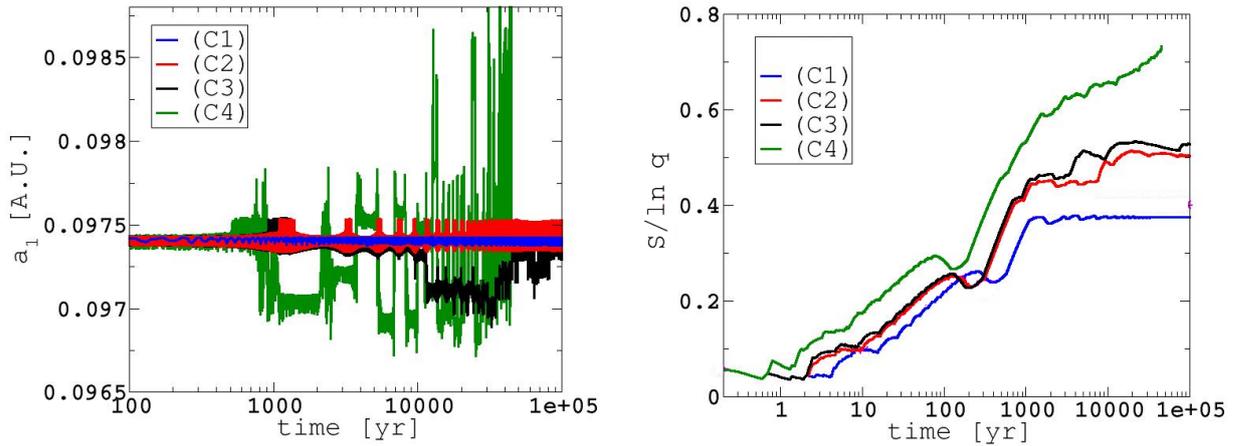


Figura A.2: Painel esquerdo: evolução temporal do semi-eixo  $a_1$ , considerando o problema planetário estrela+2 planetas do sistema HD 20003. São apresentadas quatro trajetórias obtidas a partir da simulação de distintas condições iniciais. Painel direito: evolução da entropia normalizada  $S' = S/\ln q$ , para cada uma das quatro condições iniciais.

pela Equação (A.1). A relação (A.12) é utilizada para encontrar uma expressão analítica aproximada para a derivada temporal de  $S$ ,  $dS/dt$ .

Na Figura A.2, apresentamos dois painéis ilustrativos para medidas de entropia Shannon  $S$  tomadas para as evoluções orbitais do sistema HD 20003 (Udry et al., 2019). No painel esquerdo, vemos quatro trajetórias, todas para o mesmo sistema, mas originadas de condições iniciais diferentes. O gráfico apresenta o comportamento temporal dos semi-eixos de um dos corpos do problema. Cada condição representa um tipo de regime dinâmico: C1 designa um caso de órbita quasi-periódica, para a qual espera-se  $\langle Y \rangle \approx 2$ ; C2 e C3 são duas trajetórias caóticas estáveis; quanto a C4, representa um caso caótico instável em  $t < T$ , onde  $T = 10^5$  anos. Para a simulação, definimos  $h = 10^{-1}$  ano, o que implica  $Z = 10^6$  pontos (nos casos em que a integração é completa).

O painel direito da Figura A.2 apresenta o comportamento temporal da entropia normalizada pelo logaritmo do número total de células  $q$ ,  $S/\ln q$ , considerando uma partição composta de  $1.6 \times 10^5$  células: trata-se de uma grade de  $1600 \times 1600$  células definidas no espaço  $(a, e)$  (e mais tarde reconstruídas no espaço  $(I, J)$ ).

Vemos que a órbita mais regular do conjunto, C1, é também aquela que apresenta o menor valor de  $S$  ao final da integração. Passados  $\sim 10^3$  anos,  $dS/dt \approx 0$  para o caso desta trajetória, indicando uma estabilização no número de células ocupadas. Por outro lado, C2 e C3 ainda mostram um pequeno crescimento de  $S$  para tempos maiores que  $10^3$

anos, indicativo de difusão mais rápida no espaço das ações. Finalmente, C4 mostra o crescimento mais vertiginoso de  $S$ : essa condição inicial específica resulta na disrupção do sistema, ocasionada pela colisão entre os planetas.

### A.1.1 Ensemble de trajetórias e o reescalamiento das órbitas

É pertinente explicar, de maneira geral, dois conceitos utilizados dentro da concepção da teoria Shannon aplicada a sistemas planetários: (i) o processo de re-escalamento das dimensões de espaço-tempo do sistema; (ii) o uso de *ensembles* de “trajetórias-fantasma”.

O chamado reescalamiento das dimensões do sistema é operado de tal maneira que, nas simulações, integra-se o movimento de um sistema “equivalente”, no qual o semi-eixo inicial do objeto mais externo é recolocado a uma distância de 1 UA do corpo central.

Seja tomado  $\epsilon$  um fator multiplicativo que “expande” ou “contraí” o comprimento radial do sistema, isto é,  $a_i^* = \epsilon a_i$  ( $i = 1, \dots, N_p$ ),  $a_i$  sendo o  $i$ -ésimo semi-eixo. Define-se que  $\epsilon = 1\text{UA}/a_{N_p}$ , com  $a_{N_p}$  designando o valor nominal do semi-eixo respectivo à órbita mais externa. É direto perceber, a partir da Terceira Lei de Kepler, que em um sistema conservativo as escalas de tempo características (quer dizer, os períodos orbitais dos corpos) serão todas reescaladas por um fator de  $\epsilon^{3/2}$ . Se aceitarmos uma aproximação (conservativa) na qual o regimes periódicos característicos do sistema (períodos seculares e ressonantes, por exemplo) são aproximadamente proporcionais aos períodos orbitais, então todas as escalas de tempo ficam alteradas por um fator  $\epsilon^{3/2}$ .

Cada trajetória reescalada é integrada dentro de um ensemble de “órbitas-sombras”, totalizando  $n_{\text{ens}} + 1$  sistemas de trajetórias por planeta, ou seja,  $N_p \times (n_{\text{ens}} + 1)$  órbitas integradas, ao todo. Cada trajetória-sombra parte de um ponto deslocado de valores  $(\delta a, \delta e)$  em relação ao ponto inicial nominal,  $(a_{0i}, e_{0i})$ , no plano de fase do  $i$ -ésimo planeta.

Na Figura A.3, ilustramos as ideias do reescalamiento e dos ensembles, por meio de uma integração da condição inicial A1 do sistema HD 20003, dentro de  $T = 10^5$  anos. Nos painéis da esquerda, mostramos a evolução temporal de  $a_2$  e  $e_2$ , sem o uso do ensemble de pares planetários ou da aplicação do reescalamiento do sistema. Ao invés disso, consideramos um pequeno desvio na vizinhança da condição nominal, afastada da trajetória original A1 (curva preta) por um incremento de  $9 \times 10^{-6}$  no valor inicial de  $e_1$ , e simulamos essa nova condição pelo mesmo tempo de integração. As curvas vermelhas nos painéis em cima e embaixo representam o resultado obtido, para  $a_2$  e  $e_2$ , respectivamente.

No lado direito da Figura A.3, os painéis superior e inferior apresentam a evolução de  $a_2^*$  e  $e_2^*$  para a condição A1\*, ou seja, vemos a evolução do sistema reescalado (observe as escalas do eixo  $y$ ). É facilmente verificável que, no caso do sistema HD 20003,  $\epsilon^{3/2} \approx 11.489$ . No painel inferior do lado direito, é simples perceber a alteração do período secular das variações da excentricidade. Ao compararmos o período secular real, através da variação de  $e$  e foi observado neste caso que  $t_{sec}^*/t_{sec} \approx 11.2821$ .

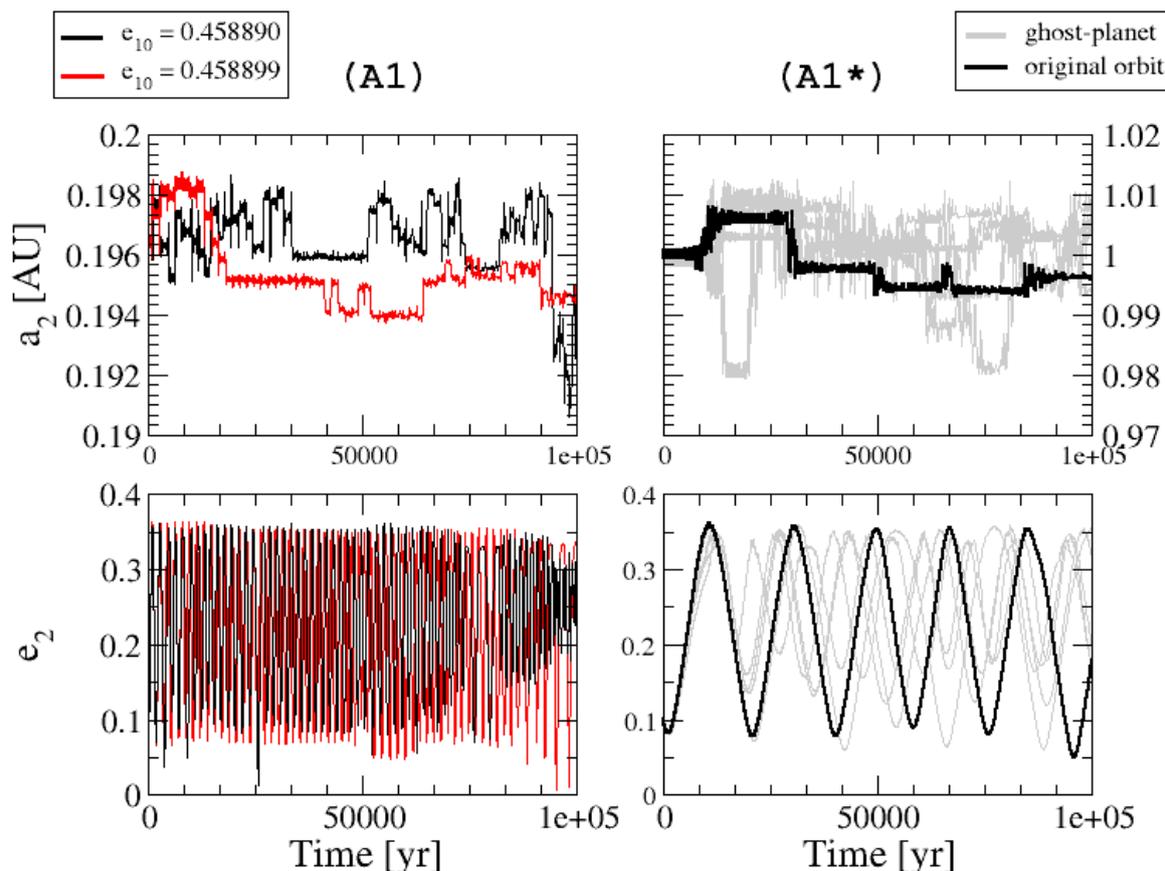


Figura A.3: Evolução da condição chamada A1 para o sistema HD 20003, considerando integrações individuais de condições muito próximas (painéis à esquerda), e tomando em conta um ensemble de 5 “sistemas-fantasmas” além da condição nominal (painéis à direita), mostrados através das curvas cinzas. Neste último caso, o sistema foi reescalado por um fator  $\epsilon = 1\text{AU}/a_2 \approx 11.5$ .

Nos gráficos à esquerda, observa-se que um pequeno desvio em  $e_1$  implica uma rápida manifestação do caos local sobre as soluções. O efeito é muito mais evidente no comportamento do semi-eixo: o painel superior esquerdo mostra que ambas as soluções (preta e vermelha) se comportam, qualitativamente, de forma análoga, apresentando intermitências ao longo da evolução de  $a_2$ .

As curvas cinzas nos plots à direita representam a evolução de cada “trajetória-fantasma”, para um ensemble de  $n_{\text{ens}} = 5$  “sistemas-fantasmas”. De fato, o uso do ensemble é capaz de reproduzir a dispersão intrínseca que é esperada quando integra-se uma solução com leve desvio em relação à condição nominal. No caso em que aplicamos o ensemble, consideramos um desvio  $(\delta a_i, \delta e_i)$ , em semi-eixo e excentricidade, de  $10^{-3}$  no entorno da condição inicial nominal de cada planeta do sistema (o caso do HD 20003,  $N_p = 2$ ).

### A.1.2 Estimativa da difusividade $D_S$ e do tempo de instabilidade $\tau_{\text{inst}}$

Dentre as formulações expostas na seção anterior, é importante destacar a aproximação  $S \sim S_0 \equiv \ln q_0$ . A ideia por trás dessa relação reside em perceber que, para tempos suficientemente longos, tal que  $Z \gg q_0$ , o segundo termo da Equação (A.12) é constante, ou tem um crescimento irrisório, com potência  $< 1$  em  $t$ , frente ao primeiro termo, que é dominante, e assim o sistema se aproxima de uma configuração ergódica.

Seguindo Cincotta e Giordano (2018), Cincotta e Shevchenko (2020), Beaugé e Cincotta (2019) e Cincotta et al. (2021), derivamos de (A.7) uma aproximação para a taxa de evolução da entropia  $S$ :

$$\frac{dS}{dt} \approx \frac{dS_0}{dt} = \frac{1}{q_0(t)} \frac{dq_0(t)}{dt}. \quad (\text{A.13})$$

Obviamente,  $q_0(t)$  designa o número de células ocupadas no intervalo  $t \subset [0, T]$ . Apelamos novamente para a aproximação ergódica. Por hipótese, localmente, o aumento discreto de  $q_0(t)$  é exclusivamente devido à mudanças temporais no conjunto de variáveis de fase  $(I, J)$ , no intervalo infinitesimal  $(t, t + \delta t)$ . Explicitamente, propõe-se que

$$\delta q_0(t) \propto \langle \delta I^2(t) + \delta J^2(t) \rangle \approx D_t \delta t, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  designa a média espacial que é tomada no intervalo  $(t, t + \delta t)$ , e  $D_t \equiv D(I(t), J(t))$  define um coeficiente de difusão local do espaço de fase, quando  $\varphi$  se difunde na região  $(I, I + \delta I) \times (J, J + \delta J)$ . Intuitivamente, a relação entre o primeiro e o segundo membros de (A.14) é nada mais que o teorema de Pitágoras para um triângulo de catetos de comprimentos  $\delta I$  e  $\delta J$  (esquematizado na Figure A.4 abaixo). Nesse sentido, (A.14) relaciona, aproximadamente, a taxa de crescimento do número de células ocupadas, com uma “medida” do quanto a trajetória  $\varphi(t)$  se difunde, ou se “espalha”, sobre o espaço de fase, ao longo do tempo (Cincotta et al., 2021).

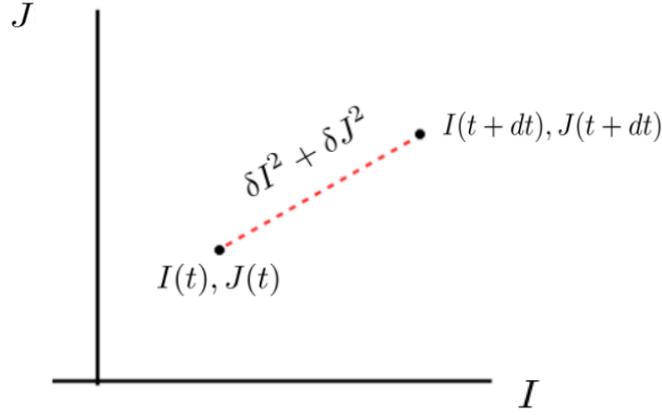


Figura A.4: Ilustração esquemática do conceito por trás da relação (A.14), conforme deve ser compreendido dentro do espaço de fase  $(I, J)$ . Cada ponto representa o centro de uma célula ocupada por um valor de fase, com cada célula definindo um elemento distinguível das demais.

Definimos uma constante de normalização  $\zeta = \Sigma/q$ , de dimensão  $[IJ]$  (i.e. dimensão de área do espaço de fase), dependente do domínio  $\Sigma$  sobre o qual a partição  $\mathcal{P}$  está definida. É fácil perceber que  $\zeta$  nada mais é que a área ocupada por cada célula da partição. Uma difusividade instântanea (local)  $D_S(\varphi, t)$  pode ser estimada a partir da derivada temporal de  $S$ , partindo da aproximação (A.13):

$$D_S(\varphi, t) = \zeta q_0(t) \frac{dS}{dt} \approx \frac{\Sigma}{q} \frac{\delta q_0(t)}{\delta t} \quad (\text{A.15})$$

conforme exposto em Cincotta et al. (2021). Seguindo esta formulação, um valor de difusividade global  $D_S(\varphi)$  pode ser aproximado através de uma média temporal sobre os valores instantâneos de  $D_S(\varphi, t)$ , calculado numericamente a cada passo  $h$  da integração.

Explicitamente:

$$D_S(\varphi) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_{t_0}^{t'} D_S(\varphi, t) dt \approx \langle D_S(\varphi, t) \rangle_{t \leq T}, \quad (\text{A.16})$$

onde a última aproximação aplica-se a tempos de integração finitos, mas suficientemente longos (hipótese ergódica). Considerando um problema planetário, a cada trajetória  $\varphi_i$  corresponderá uma difusividade  $D_{S,i}$  dada, segundo Cincotta et al. (2021), por

$$D_{S,i} = \frac{\sigma(I_i, J_i)}{q} q_{0,i}(t) \dot{S}_i(t), \quad (\text{A.17})$$

onde  $\sigma(I_i, J_i) = (I_{\max} - I_{\min})(J_{\max} - J_{\min})$  é a máxima área sobre a qual as variáveis de fase  $(I_i(t), J_i(t))$  de cada trajetória incursionam ao longo do tempo corrido.

Sendo  $D_{S,i}$  um coeficiente de difusão com unidades  $[IJ]/[t]$ , uma estimativa para o

tempo de instabilidade da trajetória  $\varphi_i$  é definido como

$$\tau_{\text{inst},i} = \frac{(\Delta I_i)^2 + (\Delta J_i)^2}{D_{S,i}}, \quad (\text{A.18})$$

conforme mostrado em Cincotta et al. (2021); Alves Silva et al. (2021). No numerador da Equação (A.18),  $\Delta I_i$  e  $\Delta J_i$  designam o semi-comprimento de cada lado da partição, centrados nos respectivos valores iniciais,  $(I_{0i}, J_{0i})$ .

### A.1.3 Difusividade $D_{q_0}$

No capítulo 5 desta tese, são apresentadas algumas figuras comparativas entre o coeficiente de difusão  $D_S$  (Equação (A.17), derivado da evolução da entropia Shannon  $S$ , e um segundo coeficiente de difusão,  $D_{q_0}$ , que é obtido da taxa de crescimento do logaritmo de células ocupadas da partição ( $\ln q_0$ ). Explicamos um pouco mais a respeito deste segundo coeficiente de difusão.

A Figura 4 do trabalho de Beaugé e Cincotta (2019) mostra a primeira comparação entre a evolução da entropia normalizada,  $S/\ln q$ , e a quantidade normalizada de células ocupadas,  $\ln q_0/\ln q$ . A Figura A.5, abaixo, apresenta a mesma comparação, considerando cinco órbitas diferentes de um mesmo sistema planetário (HD 20003). Para explicar o conceito de  $D_{q_0}$ , não faz-se necessário especificar as condições iniciais que geram cada curva.

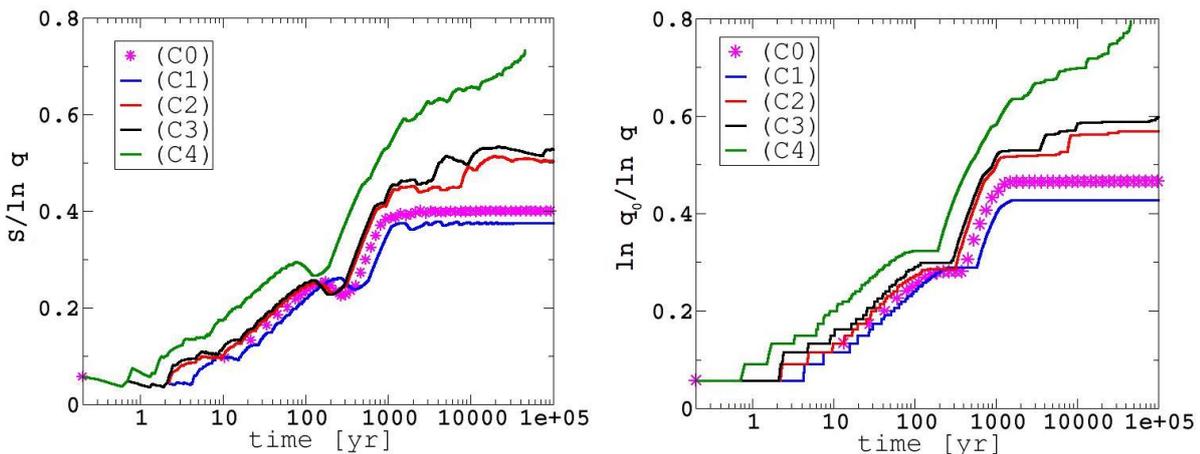


Figura A.5: Evolução temporal de cinco órbitas tomadas do espaço de fase do sistema HD 20003. Cada trajetória foi integrada por  $10^5$  anos. (a) Evolução da entropia Shannon para cada condição, segundo informado na legenda.  $S$  é calculada a partir da Equação (A.12). (b) Evolução do logaritmo natural do número de células ocupadas,  $\ln q_0$ . Ambos os painéis apresentam os resultados normalizados pelo número total de células da partição,  $q = 1.6 \times 10^5$ .

O detalhe importante consiste em perceber que tanto  $S$  quanto  $\ln q_0$  apresentam um comportamento evolutivo bastante similar, qualitativa e quantitativamente. Por um lado, a Figura A.5 corrobora a aproximação ergódica para o cálculo da entropia, isto é,  $S \approx S_0$ , com  $S_0 \equiv \ln q_0$ . É importante entender que a aproximação ergódica é um recurso utilizado não para calcular propriamente  $S$ , mas para definir a relação entre uma média temporal da derivada de  $S$ ,  $\langle dS/dt \rangle$ , e o número de células ocupadas,  $q_0$ .

Por outro lado, é interessante também destacar uma diferença no comportamento das duas funções, em determinados trechos. Repare que há ocasiões em que  $S$  apresenta pequenos decréscimos. A rigor,  $S(t)$  não é uma função monótona crescente, como se verifica nos pontos  $t \approx 100$  anos e  $t \approx 1000$  anos, no painel esquerdo. No mesmo intervalo, o gráfico à direita mostra um comportamento diferente, com o número de células preenchidas mantendo-se fixo, e a curva  $\ln q_0$  evolui horizontalmente.

Explicamos, anteriormente, como o coeficiente  $D_S$  é obtido a partir de uma regressão linear feita a partir do comportamento temporal da função  $S$ . Analogamente, pode-se fazer o mesmo com a função  $\ln q_0$ . O coeficiente  $D_{q_0}$  é, então, estimado por meio de uma média da taxa de crescimento de  $\ln q_0(t)$ , utilizando mínimos quadrados. Esta é a diferença essencial no método de computação de  $D_S$  e  $D_{q_0}$  (e, conseqüentemente, na computação de  $\tau_{\text{inst}}(S)$  e  $\tau_{\text{inst}}(q_0)$ ).