

Quando uma onda sísmica (com amplitude A_0) incide numa interface, parte da energia é transmitida para o outro lado (onda refratada ou transmitida) e parte é refletida de volta para o meio de onde a onda veio (onda refletida). Vamos estudar agora a relação entre as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas.

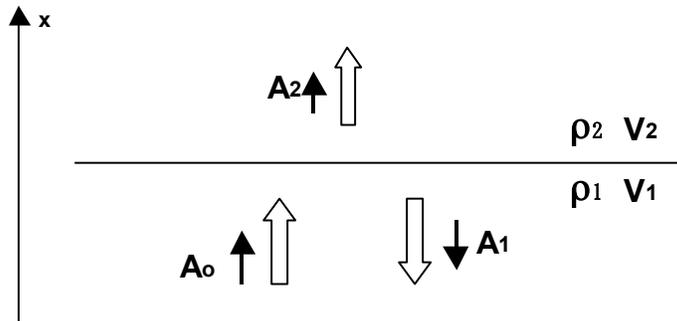


Fig. 1. Uma interface separa dois meios com densidades e velocidades diferentes. Setas brancas grandes representam direção de propagação, e setas pequenas pretas representam o deslocamento das partículas (a vibração da onda P). Uma onda P de amplitude A_0 propagando-se no meio 1, no sentido $+x$, incide na interface com o meio 2. A interface está na posição $x=0$. As densidades e velocidades de propagação são ρ e V , respectivamente.

Vamos considerar o caso particular de ondas senoidais, ou seja, a vibração das partículas varia no tempo e espaço de acordo com

$$u_0(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t) = A_0 \cos[k_1(x - V_1 t)]$$

$$u_1(x,t) = -A_1 \cos(kx - \omega t) = -A_1 \cos[-k_1(x - V_1 t)]$$

$$u_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t) = A_2 \cos[k_2(x - V_2 t)]$$

onde

A_0 é a amplitude máxima do deslocamento da partícula em uma onda com frequência angular ω , velocidade V_1 , e número de onda $k_1 = \omega / V_1 = 2\pi/\lambda_1$, sendo λ_1 o comprimento de onda das ondas no meio 1 (incidente e refletida), etc. Para a onda refletida u_1 , o sinal negativo " $-k_1$ " indica propagação no sentido negativo do eixo x . O sinal negativo da amplitude " $-A_1$ " será explicado adiante.

Uma partícula qualquer no meio 1 terá seu deslocamento dado pela superposição da onda incidente com a refletida:

$$u(x<0, t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$$

Sinal das amplitudes

Deve-se lembrar que as vibrações das ondas sísmicas ("deslocamento das partículas") são grandezas vetoriais. O deslocamento de qualquer partícula, $u(x,t)$, será positivo se a partícula tiver se deslocado para cima (sentido positivo do eixo x), e negativo se o deslocamento tiver sido para baixo. O *sinal das amplitudes máximas* A_0 , A_1 e A_2 (positivo ou negativo), no entanto, *dependem de uma convenção*. Há duas convenções comuns para o sinal da amplitude de uma onda P:

a) a amplitude é positiva se o deslocamento for no mesmo sentido do eixo x do sistema de coordenadas de referência. Nesta convenção, os deslocamentos na Fig. 1 seriam

A_0 e $A_2 > 0$, e $A_1 < 0$.

b) a amplitude da onda P é positiva se o deslocamento for no mesmo sentido da propagação da onda. Neste caso, A_0 , A_2 , e $A_1 > 0$.

A convenção **a** é a mais usada em Sismologia, principalmente quando há ondas S ou no caso de duas dimensões (incidência inclinada). A convenção **b** é usada frequentemente em sísmica aplicada nos casos onde as ondas têm incidência aproximadamente normal e há apenas ondas P. Neste texto adotaremos a convenção **b**, isto é, se os deslocamentos forem nos sentidos indicados na Fig. 1, as amplitudes serão positivas.

Para calcular a relação entre as amplitudes A_0 , A_1 e A_2 , são necessárias duas condições de contorno.

1) **Continuidade dos deslocamentos**. Dois pontos "juntos" devem se deslocar com as mesmas amplitudes. A amplitude de uma partícula do meio 1, *junto à interface*, deve ser igual à amplitude de outra partícula do meio 2 que também esteja encostada à interface (caso contrário os dois meios estariam se abrindo ou se sobrepondo). Isto é:

$$\begin{aligned} \text{em } x = 0 \quad u(0^-,t) &= u(0^+,t) \\ \text{ou seja,} \quad A_0 - A_1 &= A_2 \end{aligned} \quad (I)$$

2) **Conservação de energia**. O fluxo de energia incidente na interface é igual à soma dos fluxos de energia transmitida e refletida. Uma onda harmônica com amplitude máxima de deslocamento A , frequência ω , e velocidade de propagação V , terá

$$\text{fluxo de energia} = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 V \quad [\text{Veja o quadro abaixo sobre fluxo de energia}]$$

$$\text{fluxo de energia da onda incidente} = \frac{1}{2} \rho (\omega A_0)^2 V_1$$

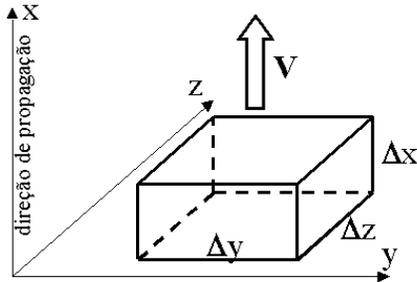
Chamando o produto $\rho V = Z =$ "**impedância acústica**", teremos:

$$\text{fluxo incidente} \Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 Z_1 A_0^2$$

$$\text{fluxo refletido} \Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 Z_1 A_1^2$$

$$\text{fluxo transmitido} \Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 Z_2 A_2^2$$

O que é "fluxo de energia"? É a quantidade de energia que atravessa uma superfície, por unidade de área e por unidade de tempo. Vamos ver como se expressa esta energia. A Figura 2 mostra um elemento de volume em uma onda que se propaga na direção x.



Este elemento de volume bem pequeno, $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, ao vibrar durante a passagem de uma onda sísmica terá energia cinética

$$= \frac{1}{2} (\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \cdot (\text{velocidade da partícula})^2$$

velocidade máxima de vibração da partícula $(\partial u / \partial t) = \omega A$

densidade de energia sísmica = energia / volume = $\frac{1}{2} \rho (\omega A)^2$

A energia cinética da onda, contida no volume $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, vai demorar um tempo Δt para atravessar a superfície $\Delta y \cdot \Delta z$.

fluxo de energia = [energia] / (área $\cdot \Delta t$) = $[\frac{1}{2} (\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \cdot (\omega A)^2] / (\Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t)$

como $\Delta x / \Delta t =$ velocidade de propagação da onda = V

$$\text{fluxo} = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 V = \frac{1}{2} \rho (\text{velocidade da partícula})^2 \cdot (\text{Velocidade de propagação})$$

Observação: Nesta dedução, dissemos que a densidade de energia cinética é $\frac{1}{2} \rho (\omega A)^2$. Numa onda harmônica, porém, a velocidade da partícula varia no tempo e esta expressão seria a energia máxima. Além da energia cinética, a onda sísmica tem energia potencial devido à deformação elástica das rochas. Pode-se demonstrar que, na média, a energia cinética é igual à energia potencial, de maneira que a densidade de energia total da onda é mesmo equivalente a $\frac{1}{2} \rho (\omega A)^2$.

Exercício de aplicação do conceito de fluxo de energia:

Tsunamis são ondas que se propagam pelo oceano geradas por um deslocamento vertical súbito do fundo oceânico na região epicentral de um terremoto grande. (O movimento de partícula destas ondas é parecido com o da onda superficial Rayleigh, embora os tsunamis não sejam ondas "elásticas", mas ondas "de gravidade"). A velocidade de propagação de um tsunami depende da profundidade do mar: $V = (g h)^{1/2}$; g = aceleração da gravidade, e h = espessura da camada de água.

a) calcule a velocidade de propagação do tsunami em alto mar onde a profundidade é $h_a = 5 \text{ km}$, e próximo da costa onde $h_c = 50 \text{ m}$. Expresse as velocidades em km/h.

b) Um terremoto na costa do Chile gerou um tsunami cuja amplitude em alto mar, na região do Havaí, é de $A_a = 30 \text{ cm}$. Use o conceito de fluxo de energia e densidade de energia sísmica para estimar a amplitude do tsunami perto da costa onde o mar tem profundidade de $h_c = 50 \text{ m}$.

fluxo incidente = fluxo refletido + fluxo transmitido

Cancelando o termo $\frac{1}{2} \omega^2$, teremos:

conservação de energia: $Z_1 A_0^2 = Z_1 A_1^2 + Z_2 A_2^2$ (II)

As equações (I) e (II) fornecem:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = \mathbf{t} \quad \text{(III)}$$

Podemos definir coeficientes de reflexão e de transmissão, em termos de amplitude dos deslocamentos ou em termos de fluxo de energia

Energia

$$\text{Coef. de reflexão } \mathbf{R} = \text{fluxo refletido/fluxo incidente} = \frac{Z_1 A_1^2}{Z_1 A_0^2} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

$$\text{Coef. de transmissão } \mathbf{T} = \text{fluxo transmitido/fluxo incidente} = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_0^2} = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Note que $\mathbf{R} + \mathbf{T} = 1$ (conservação de energia, eq II) e que \mathbf{R} e \mathbf{T} independem de qual meio (1 ou 2) vem a onda incidente.

Amplitude:

Denominando $\mathbf{r} = A_1/A_2$ e $\mathbf{t} = A_2/A_0$ (Aqui \mathbf{t} não é tempo!)

Teremos também :

$$\mathbf{r} + \mathbf{t} = 1 \quad (\text{continuidade do deslocamento, eq. I})$$

\mathbf{R} e \mathbf{T} são ambos positivos e ≤ 1 . Porém \mathbf{t} pode ser > 1 e \mathbf{r} pode ser negativo. Os valores \mathbf{r} e \mathbf{t} dependem se a onda incidente está no meio 1 ou no meio 2. Ou seja, nas fórmulas III, Z_1 é a impedância do meio de onde a onda está vindo, e Z_2 a do meio para onde a onda vai !

Note que os coeficientes \mathbf{r} , \mathbf{t} , \mathbf{R} e \mathbf{T} não dependem da frequência ω . Isto significa que qualquer forma de onda (superposição de ondas com várias frequências diferentes) terá os mesmos coeficientes de reflexão e de transmissão. Ou seja, as fórmulas III valem tanto para ondas harmônicas como para qualquer pulso de onda sísmica!