1. Tensão - conceitos básicos e guia de estudo

Recomenda-se estudar o *Turcotte & Schubert*: partes 2.1, 2.2 (até o problema 2.4), 2.3 e 2.4. Inclui aplicações importantes de isostasia!

Bom entendimento do conceito físico e matemático de *tensões* é essencial não apenas em propagação de ondas (uma vez que a onda sísmica provoca tensões ao se propagar) mas também em tectônica e geodinâmica (para se entender as “forças” que movem as placas), estudos das causas da sismicidade (tensões nas falhas geoógicas), geotecnia e engenharia geológica.

A tensão em uma área A é definida por

$$tens\tilde{a}o = \frac{\vec{F}}{A} = \vec{p} \qquad \text{[eq. 1]}$$

onde ***F*** (vetor) é a força total externa agindo na área ***A***.

Importante! Na equação 1, a força é um vetor, mas a “área” também tem orientação e portanto também é um tipo de vetor! A tensão, portanto, é uma relação entre dois vetores. Para uma mesma área fixa, a tensão ***p*** é um vetor. Além disso, a área *A* sempre subtende um corpo; é sempre a superfície *A* de um corpo. Na Fig. 1.1a, *A* é a face (área) de um cubo (corpo).

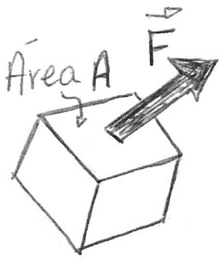

Fig. 1.1a

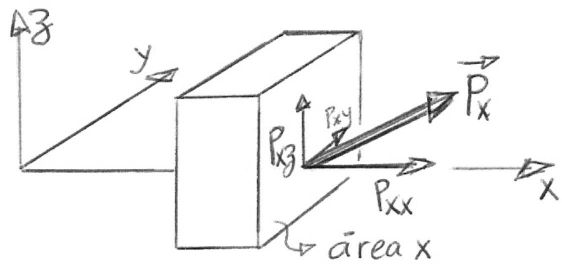

Fig. 1.1b

----------- Exercício 1.1 ---------

Qual a tensão (pressão) agindo no fundo marinho devido ao peso de uma camada de mar de profundidade de h=5 km? A densidade da água é ρ=1 g/cm^3. Use g=10 m/s^2.

Resposta: pressão = 50 MPa (Pa é a unidade de pressão/tensão no sistema S.I.)

A tensão ***p*** terá três componentes no sistema de referência: $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Considerando um cubo com faces orientadas segundo o sistema *x*, *y*, *z*, podemos identificar a área pela sua normal (i.e., o vetor unitário perpendicular à área, orientado para fora do corpo)

Na Fig. 1.1b definimos $\mathbf{p_x} = (p_{xx}, p_{xy}, p_{xz})$. [Obs.: em inglês, o vetor $\mathbf{p_x}$ é chamado de “*traction*”; não confundir com “tração”!]

p_{xx} = tensão normal agindo na área *x*

p_{xy} = tensão tangencial, agindo na área *x*, com orientação na direção *y*

p_{xz} = tensão tangencial, agindo na área *x*, com orientação na direção *z*

A convenção mais comum é que o primeiro índice dá a orientação da área, e o segundo a da componente da tensão. (Cuidado, há livros que usam o contrário!).

---------- **Exercício 1.2** ------
Estudos sismológicos em Minas Gerais mostraram que as tensões na crosta superior são compostas de uma tração NS de 20 MPa e uma compressão E-W de 10 MPa (Fig. 1.2). Imagine uma falha geológica de orientação N 45°E. Quais as tensões (normal e tangencial) agindo no plano da falha?
[Obs. A expressão "compressão E-W" é muito frequente na literatura e subtende o seguinte: a direção da tensão (força) é E-W e a área onde ela está sendo aplicada é uma superfície vertical orientada N-S (é uma tensão normal). O mesmo vale para "tração N-S" que age num plano vertical orientado E-W].
Dica: Isolar um bloco de faces NS, EW e falha geológica (como o bloco NW da Fig. 1.2b) e indicar todas as forças que agem neste bloco. Pelo equilíbrio das **forças**, pode-se deduzir as tensões no plano na falha. Lembre que o equilíbrio isostático se dá em termos de FORÇAS, não de tensões! É preciso multiplicar as tensões pelas áreas para se obter as forças.

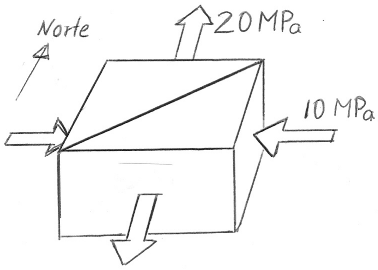

Fig. 1.2a

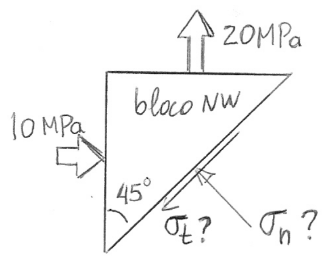

Fig. 1.2b

Resposta: tensão normal σ_n = -5 MPa (tração; sinal -vo significa sentido contrário ao desenhado na figura), tangencial σ_t = 15 MPa (sentido da figura)

Embora o conceito físico de tensão envolva uma área, pode-se pensar na tensão agindo num "ponto" (por exemplo, de coordenadas x,y,z) fazendo-se o limite da área tender a zero.

$$p(x,y,z) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

No entanto, a orientação da área *ΔA* não desaparece!! A tensão agindo "num ponto" traz sempre junto a orientação da área original! Ou seja, a tensão ***p*** num mesmo ponto (*x,y,z*) será diferente conforme a orientação da área subtendida. Ainda mais: além da orientação da área, há o "corpo": a normal à área (mesmo infinitesimal) continua definida para fora do corpo (mesmo que o corpo também tenha tendido a zero…).

Num sistema de referência *x, y, z*, podemos definir as 9 componentes das tensões agindo nas três áreas normais às direções *x, y, z*.

$$\boldsymbol{P} = \begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{matrix} \qquad [\text{ eq. 2 }]$$

Este conjunto de 9 componentes chama-se tensor de esforço ("stress tensor"). Conhecendo-se as tensões agindo nas áreas perpendiculares a *x, y* e *z*, pode-se determinar as tensões agindo em áreas com quaisquer outras orientações. Por isto diz-se que o tensor ***P*** define completamente o “estado de tensões”. Os exercícios 1.2 e 1.3 são exemplos de como se pode calcular as tensões agindo em áreas com orientações diferentes das *x, y, z.*

------ Exercício 1.3 ------

Uma região está sujeita a uma compressão E-W σ_1 e uma compressão N-S σ_2. Quais as tensões normais e tangenciais num plano vertical que faz um ângulo θ com a direção E-W?

Dica: Faça uma figura semelhante à Fig. 1.2b indicando σ_1 e σ_2 (ambos compressivos, i.e., apertando o corpo!). Chame a área da diagonal de *A* e expresse as outras áreas onde atuam σ_1 e σ_2 como função de *A* e θ. Faça o equilíbrio das <u>forças</u> em duas direções, uma paralela e outra perpendicular à diagonal.

Resposta: $\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \quad ; \quad \sigma_t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta$

Nesta resposta, tensão normal compressiva é positiva. Já o sinal da tensão tangencial depende do sentido escolhido no plano. Verifique se a fórmula acima está certa nos casos particulares de $\theta = 0^o$ e 90^o. Cuidado!! Há várias fórmulas parecidas com esta (como as 2-48 a 2-50 do Turcotte & Schubert), mas a definição do ângulo θ pode ser diferente!

------ Exercício 1.4 ------

Num paralelepípedo de 4m de comprimento, 2m de altura e 3 m de largura, tensões de cisalhamento p_{xz} e p_{zx} agem nas faces horizontais e laterais (Fig. 1.3). Se o paralelepípedo está em equilíbrio total (Σ forças e <u>Σ dos momentos</u> , ou torques, = 0), mostre que $p_{xz} = p_{zx}$.

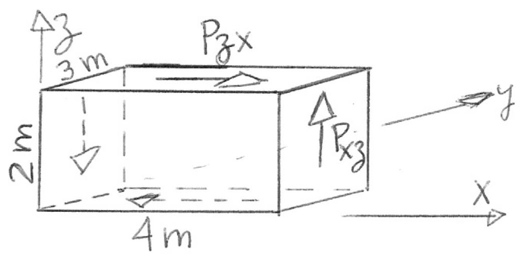

Fig. 1.3

Dica: calcule o momento (torque) total de todas as <u>forças</u> em torno do eixo y.

Pode-se mostrar que esse resultado vale para qualquer tensor de esforço, i.e., $p_{ij} = p_{ji}$. Portanto o tensor de esforço (eq. 2) é simétrico e só tem 6 componentes independentes. Isso significa que a convenção de se usar o primeiro índice como sendo a orientação da área e o segundo a orientação da tensão não é importante pois as fórmulas não se alteram.

------ Exercício 1.5 ------

Um cubo está sujeito apenas a tensões tangenciais (Fig. 1.4). Quais as tensões agindo em cada um dos planos internos inclinados de 45^0 ? Para cada um dos planos, especifique se são tensões de compressão, tração ou de cisalhamento.

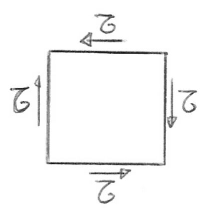

Fig. 1.4

- - -- -- ------- -----------

Este último exercício mostra que o tipo das tensões (compressão, cisalhamento, etc.) depende do sistema de referência!! Dependendo da direção adotada, as componentes do tensor mudam, embora o esforço continue o mesmo. Em analogia com um vetor, podemos dizer que as componentes de um vetor dependem do sistema de referência, mas o vetor em si continua o mesmo.

As 9 componentes do esforço (p_{ij}) formam um tensor de 2a. ordem que tem propriedades matemáticas específicas, diferente de um vetor. O que define um tensor é o modo de transformação das componentes de um sistema de referência para outro sistema com orientação diferente.

Exercício 1.6 ------

Na situação do problema 1.3, as componentes do tensor de esforço no sistema EW(x)/NS(y) é:
$p_{xx} = \sigma_1$; $p_{yy} = \sigma_2$; $p_{xy} = p_{yx} = 0$

Calcule as 4 componentes do tensor de esforço em um sistema de coordenadas orientado na direção x' fazendo um ângulo θ com o eixo x, e y' fazendo um ângulo θ com o eixo y (NS).

Mostre que $p_{xx} + p_{yy} = p_{x'x'} + p_{y'y'}$

A soma dos elementos da diagonal é chamada de “traço” do tensor, e é um invariante (i.e., é uma constante que não depende da orientação do sistema de referência).

Mostre que $p_{x'y'} = p_{y'x'}$

---- -- --- ------ - - ---

Convenção de sinal das tensões.

Há duas maneiras de se entender o sinal (+vo ou –vo) das tensões. Na convenção geológica, a tensão normal compressiva (que aperta o corpo, e portanto tem sentido para dentro do corpo!) é definida como positiva. Isto é razoável pois na Terra as tensões normais são geralmente compressivas devido ao próprio peso das rochas (pressão ~ ρgh). Esta é a covenção adotada pelo Turcotte & Schubert. Neste caso, o sinal das tensões tangenciais dependem das orientações dos eixos do sistema de referência, e é preciso olhar bem a definição antes de interpretar o sinal de uma tensão de cisalhamento.

Outra convenção, mais comum em Sismologia, é adotar o sinal de acordo com o próprio sistema de referência. Neste caso as trações serão positivas, pois numa área orientada na direção *+x*, uma tensão p_{xx} orientada no sentido positivo do eixo *x* seria uma tração. Compressão seria negativa. Neste caso, os sinais das tensões de cisalhamento seguem o sentido dos eixos de referência. Por exemplo, p_{xy} será positiva se apontar pro sentido positivo do eixo *y*. Esta convenção (sismológica) é mais fácil de usar nas equações de propagação de ondas sísmicas.

Exercício 1.7 --- ---

Retomando o exercício 1.2, suponha que às tensões "tectônicas" (tração NS de 20 MPa e compressão E-W de 10 MPa) seja somada uma compressão geral devido à pressão litostática a uma profundidade de z = 3 km (a densidade das rochas é ρ = 2,7 g/cm^3). Isto é, as tensões "tectônicas" (ou relativas) atuam a uma profundidade de 3 km, onde o peso das rochas acima causam uma compressão geral adicional ("hidrostática", ρ g z) em todas as direções ("pressão de confinamento"). Qual a tensão normal e a de cisalhamento absolutas (totais) na falha? Se o coeficiente de atrito na falha for μ = 0.6, a falha está estável ou há ruptura e sismo?
[Obs. Este tipo de análise é muito comum em estudos de sismotectônica e de geotecnia).