2. Deformação - conceitos básicos e guia de estudo (versão 08/03/2013)

Recomenda-se estudar o *Turcotte & Schubert*: partes 2.7 (principalmente) e 2.8 (se tiver tempo).

Bom entendimento do conceito físico e matemático de *deformação* é essencial não apenas em propagação de ondas (uma vez que a onda sísmica provoca deformações ao se propagar) mas também em tectônica e geodinâmica (para se entender as “forças” que movem as placas), etc.

Um exemplo pode ser visto na Fig. 2.1 que mostra as velocidades de vários pontos do Chile antes do terremoto de Maule de 2010, M=8.8 (Ruegg et al., 2009). Estas velocidades foram medidas por GPS, entre 1996 e 2002, e são relativas ao interior estável da Placa Sul-Americana. Pode-se ver que as localidades da costa vinham se movimentando a uma taxa de 35 a 40 mm/ano ao passo que pontos na Cordilheira, mais afastados da costa, tinham velocidades bem menores. Isto significa que a crosta nesta região estava diminuindo de tamanho, i.e., estava sendo “apertada” ou deformada. Ou seja, pode-se perceber que a “deformação” está relacionada à variação espacial dos “deslocamentos”.

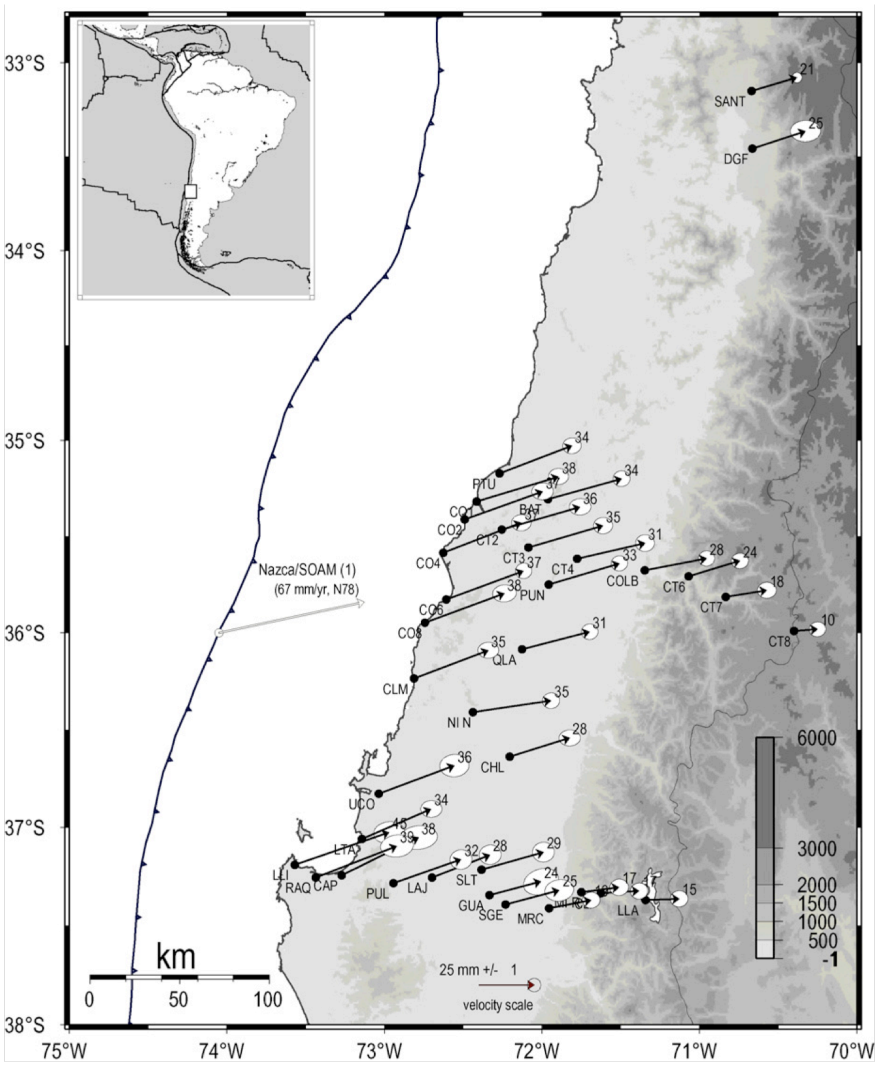
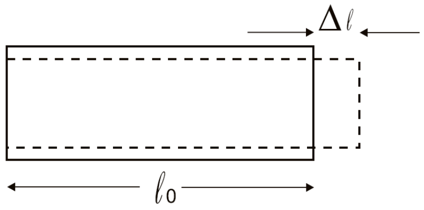


Fig. 2.1. *Velocidades na parte central e sul do Chile com relação à parte estável da placa Sul-Americana. Pontos pretos são as posições das estações de GPS. Números ao lado das setas são as velocidades (mm/ano). Fonte: Ruegg et al.(2009).*

2.1 Deformação Linear

É a medida do “esticamento” ou “encurtamento” (“stretching/shortening”). Um paralelepípedo de comprimento inicial l_o (sem deformação) aumentando de Δl terá uma deformação linear definida por:



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$ [eq. 2.1]

Fig. 2.2

Por exemplo, durante a passagem de uma onda P as partículas do meio têm deslocamentos (u) que variam conforme a posição (x) da partícula. Ou seja, u = f (x).

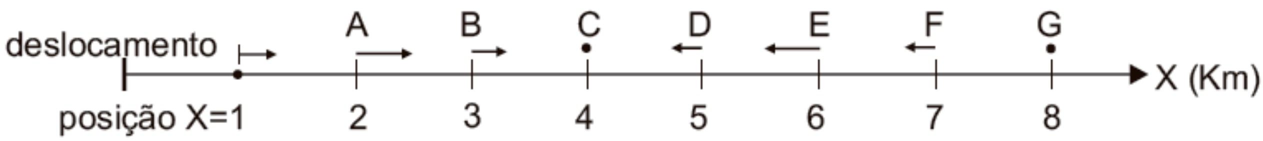


Fig. 2.3. *Partículas A, B, C, etc., com deslocamentos devido a uma onda P.*

No exemplo acima, temos u(1 km) = 5 mm (i.e., a partícula que está na posição x=1 km tem um deslocamento de 5 mm. Da mesma forma u(2) = 10mm; u(3) = 5mm; u(4) = 0; u(5) = -5mm.

A deformação linear entre os pontos A e B será, pela definição da eq. (2.1):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{u(B)-u(A)}{x(B)-x(A)} = \frac{5-10}{3-2}\frac{(mm)}{(km)} = -5.10^{-6}$$ (deformação é adimensional, por definição!)

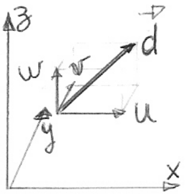
Exercício 2.1. a) Qual a deformação linear entre os pontos E e F da Fig. 2.3 ? b) entre os pontos C e G? Na Fig. 2.1, qual a deformação linear anual entre os pontos CLM (na costa) e CT8 (na cordilheira)?

Nos exemplos acima, definimos a deformação entre dois pontos. Mas podemos definir a deformação num ponto fazendo o limite B -> A

$$\varepsilon = \lim_{B\to A}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Note que nesta definição de deformação linear, ε > 0 significa alongamento e ε < 0 encurtamento! Esta definição dos sinais é importante! Outro ponto importante da definição acima, é que se usa derivada parcial, ou seja, a deformação linear na direção x deve ser medida sem mudar a posição nas outras direções.

No caso geral de deslocamentos com componentes nas três direções, define-se uma deformação linear para cada direção. Chamamos de (x,y,z) a posição de uma partícula qualquer e $\boldsymbol{d}$ o seu deslocamento (Fig. 2.4). Cada partícula tem um deslocamento diferente e portanto $\boldsymbol{d} = f(x,y,z)$. O deslocamento de cada partícula terá componentes $\boldsymbol{d} = (u,v,w)$ nas direções x, y, e z, respectivamente. As deformações lineares nas três direções são definidas como

Fig. 2.4 

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{[eq. 2.2]}$$

Para deformações bem pequenas (infinitesimais), a variação volumétrica, θ, também chamada de “dilatação”, pode ser expressa por

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_o} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\,\vec{d} = \nabla.\,\boldsymbol{d} \qquad \text{[eq. 2.3]}$$

Quando vários pontos se deslocam no espaço, $\boldsymbol{d} = f(x,y,z)$, o *divergente* mede a variação relativa de volume, em torno de um certo ponto. Isto é, quando os pontos se afastam um dos outros (divergem), há uma dilatação e o volume aumenta, $\theta > 0$. As deformações lineares então medem variações de comprimentos (nas direções x, y, z), variações de áreas e de volumes.

Exercício 2.2.

A Fig. 2.5 abaixo mostra cinco instantes de uma onda P harmônica propagando-se da esquerda para a direita. Determine o período (T), a velocidade de propagação (Vp) e o comprimento de onda (λ) da onda P. Numa onda harmônica o deslocamento das partículas pode ser expresso por $u(x) = A \cos (kx - \omega t)$, onde $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi/T$, e x é a direção de propagação. Mostre que $Vp=\omega/k$. Sabendo-se que a deformação linear máxima é $\varepsilon_{max} = 2 .10^{-6}$, qual o deslocamento máximo (A) das partículas? Qual a velocidade máxima das partículas?? Neste caso de onda P plana (deslocamentos apenas na direção x), qual a dilatação θ ?

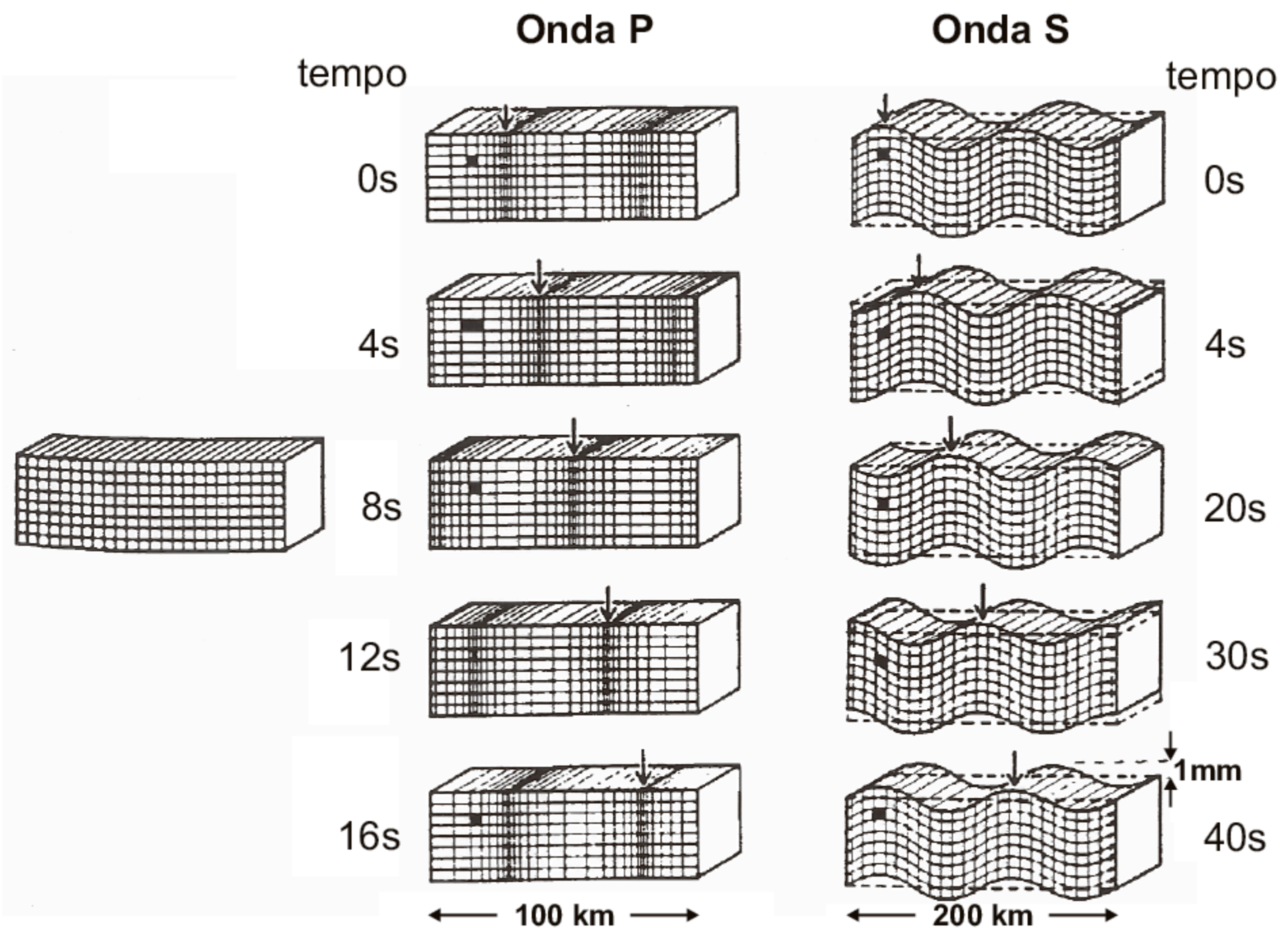


Fig. 2.5. *Esq) bloco sem ondas e sem deformações. Centro) onda P harmônica. Direita) onda S. As setas indicam a propagação de uma* _fase_ *(uma compressão no caso da onda P e um deslocamento máximo no caso da S).*

2.2 Deformação de Cisalhamento (*Shear Strain*)

Um corpo pode se deformar (i.e., mudar a sua forma, como na Fig. 2.6) sem variar seu volume. A Fig. 2.6 mostra um corpo com uma deformação dita de “cisalhamento simples”, onde não há variação de volume, apenas dos ângulos. A deformação de cisalhamento mede a variação dos ângulo retos. No caso da Fig. 2.6, chamamos de “ângulo de cisalhamento” = α = diminuição do ângulo reto ABC para A’BC.

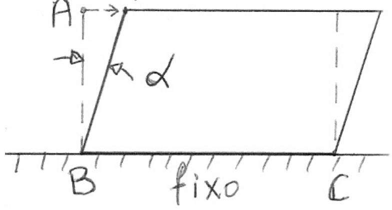


Fig. 2.6. *Cisalhamento simples*

Como exemplo, podemos ver que na passagem de um onda S propagando-se na direção x com deslocamentos (v) na direção y, ocorrem deformações de cisalhamento (Figs. 2.5 e 2.7). Os deslocamentos v variam com a posição, v = f(x). Na Fig. 2.7, v(x=0 km)= 7mm; v(x=1) = 10; v(2) = 7mm; v(3) = 0, etc.

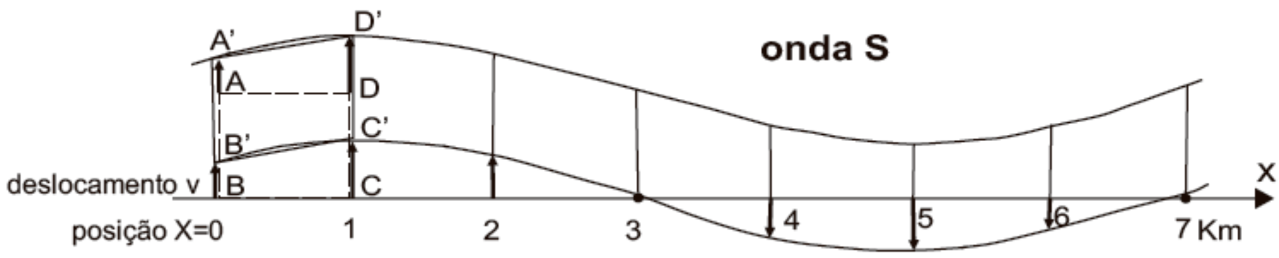


Fig. 2.7

O ângulo reto ABC diminuiu para A'B'C'. A diferença (ângulo de cisalhamento) pode ser dada por

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{C'C - B'B}{CB} = \frac{v(C) - v(B)}{x(C) - x(B)} = \frac{10-7}{1-0}\frac{(mm)}{(km)} = 3.10^{-6}$$

O ângulo de cisalhamento num ponto poderia ser definido tomando-se o limite Δx -> 0.

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Esta definição acima, porém, só vale para o caso de cisalhamento simples da Fig. 2.6.

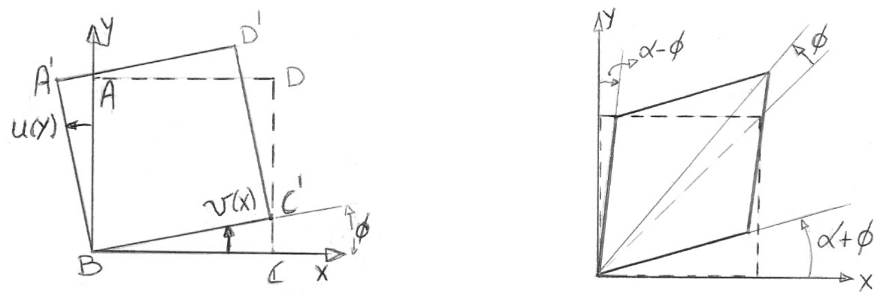


Fig. 2.8 *(a) Rotação* *(b) Rotação (φ) junto com deformação α*

Um corpo pode ter deslocamentos $v(x)$ que variam com a posição x sem que haja deformação, como no caso de uma rotação mostrada na Fig. 2.8a. Para distinguir entre rotação e deformação real (Fig. 2.8b), é preciso definir as deformações de cisalhamento como:

deformação de cisalhamento ***rotação*** $\omega = \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{d}) = \nabla \times \boldsymbol{d}$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \text{[eq. 2.4]} \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \text{[eq. 2.5]}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Por definição, a deformação ε_{xy} mede a diminuição do ângulo reto x-y (mais exatamente, a metade da diminuição). Se o ângulo reto x-y diminui, $\varepsilon_{xy}>0$; se o ângulo aumenta, $\varepsilon_{xy}<0$. A definição acima de deformação de cisalhamento é consistente com a de deformação linear, tornando cada elemento ε_{ij} uma componente do **tensor de deformação**

$$E = \begin{matrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{matrix} \qquad \text{[eq. 2.6]}$$

Este conjunto de nove componentes chama-se tensor de deformação (“*strain tensor*”). Conhecendo-se as deformações nas direções x, y e z, pode-se determinar as deformações medidas em quaisquer outras orientações. Também é um tensor simétrico (por definição, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). Note que o traço do tensor ($\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$) é um invariante (propriedade de todo tensor de 2a. ordem), como deveria de ser no caso da deformação!

Exercício 2.3
A onda S mostrada na Fig. 2.5 propaga-se na direção $+x$ e as partículas se deslocam na direção y. Chamando o deslocamento de v, expresse a função harmônica $v(x,t)$. O deslocamento máximo desta onda S é de 1 mm. Qual a máxima deformação de cisalhamento? (use as eqs. 2.5). Nesta onda S, há rotação ? (use as eq. 2.5 se necessário). Qual a máxima velocidade de partícula? Qual a dilatação θ ?

Exercício 2.4 (problema de geometria)
Um quadrado de lados orientados nas direções x e y alonga-se na direção x com $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$, mas não se deforma na direção y. O quadrado tem lados de comprimento 1 (AB=AD=1). Calcule a deformação $\varepsilon_{x'x'}$ (i.e., o alongamento na direção x', a 45º do eixo x); use a definição da eq. 2.1 para medir o alongamento da linha BD para BD'). Tratamos sempre de deformações muito pequenas ($\varepsilon \leq 10^{-6}$), pelo que podemos considerar BD e BD' aproximadamente paralelos. Mostre que o traço do tensor é invariante: $e_{xx} + e_{yy} = e_{x'x'} + e_{y'y'}$. Qual a deformação de cisalhamento $e_{x'y'}$? (i.e., a diminuição do ângulo reto definido pelas linhas AC e BD para o ângulo entre as linhas AC' e BD'). No caso de uma onda plana P que se propaga como na Fig. 2.5, é possível dizer que há deformações de cisalhamento? Há deformações lineares numa onda S?

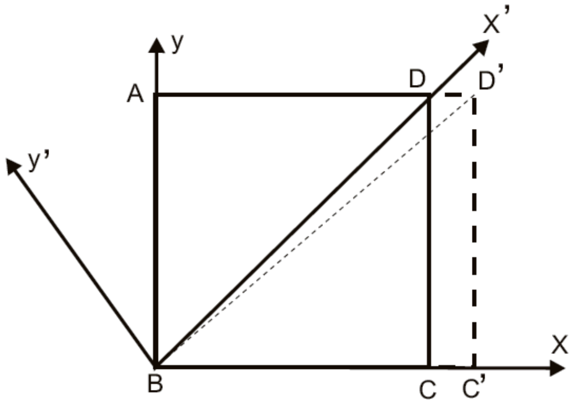


***Fig. 2.9**. Deformação correspondente a uma onda P plana (exerc. 2.4).*