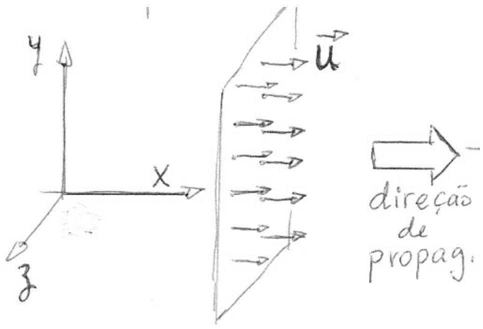
4. Equação da Onda Sísmica – Ondas Planas (versão 14/03/2014)

Vamos deduzir inicialmente a equação da onda P plana, que é um caso simples, e depois generalizar para a equação da onda sísmica em meios homogêneos e isotrópicos.

Onda Plana

É qualquer onda cujos deslocamentos e partícula são iguais em todos os pontos de qualquer plano perpendicular à direção de propagação (Fig. 4.1). Isso significa que, para uma onda propagando-se na direção x, qualquer atributo da onda (deslocamento, velocidade de partícula, dilatação, tensão, energia, etc.) depende unicamente da coordenada *x*.

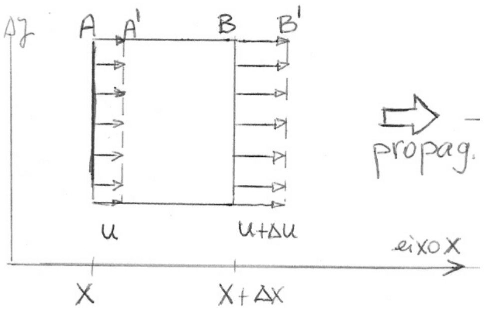


O deslocamento de qualquer partícula será função apenas de x:

$u = f(x)$

Fig. 4.1. *Onda plana P: os deslocamentos variam apenas com x.*

Numa onda plana P propagando-se na direção *x*, como os deslocamentos não variam com *y* ou *z*, não haverá deformações lineares nas direções *y* ou *z*, ($\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0$) mas unicamente ε_{xx}.



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Fig. 4.2 *Onda plana P: cada partícula se desloca apenas na direção x (A -> A'; B -> B'). O deslocamento u =u(x), e portanto apenas* $\varepsilon_{xx} \neq 0$.

A relação entre deformação linear e tensão normal (Lei de Hooke) será então:

$$p_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} \qquad \text{[eq. 4.1]}$$

Equação da onda P plana

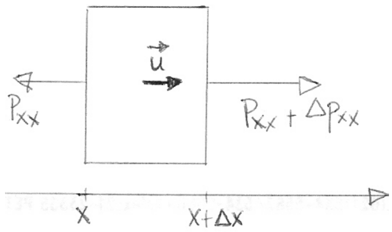


***Fig. 4.3**. Tensões normais na passagem de uma onda P.*
***u** é o deslocamento do centro de gravidade do elemento.*

Na passagem de uma onda não haverá mais equilíbrio estático e qualquer elemento de volume estará sujeito a uma força resultante causando acelerações da partícula (ou do elemento de volume). A Fig. 4.3 mostra as tensões normais na propagação de uma onda P na direção *x*.

3ª. Lei de Newton: Aplicando para a onda P da Fig. 4.3, teremos

Σ forças na direção *x* =massa x aceleração

Σ tensão x área = densidade x volume x $\partial^2 u/\partial t^2$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta p_{xx}.\Delta y.\Delta z = \rho.\Delta x.\Delta y.\Delta z.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\frac{\Delta p_{xx}}{\Delta x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

Lei de Newton [eq. 4.2]

A Lei de Newton para um corpo é: força = massa x aceleração do corpo. Esta mesma lei pode ser expressa para um “ponto”: gradiente de tensão = densidade x aceleração da partícula.

Substituindo a tensão p_{xx} na Lei de Newton (eq. 4.2) pela expressão da Lei de Hooke (eq. 4.1), obtemos a equação da onda P:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Equação de onda plana com velocidade de propagação *V.*

Neste caso da onda P, $V = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$. Note que a equação de onda resulta da combinação de uma lei geral da Física (3ª. Lei de Newton) com uma lei experimental (Lei de Hooke). Nos casos em que a aproximação linear da lei de Hooke não é mais válida, a equação de onda pode ficar bem mais complexa.

Exercícios

4.1. Use a Lei de Newton e a Lei de Hooke para deduzir a equação da onda S propagando-se na direção x, com deslocamentos v na direção y. Note que os deslocamentos variam apenas com x ! Dica: Use a Fig. 2.7 (capítulo de Deformações) e expresse as tensões de cisalhamento em cada lado do cubo A'B'C'D'; lembre que as tensões variam com a posição x e que o elemento de volume terá uma aceleração na direção y.

4.2. Mostre que qualquer função onde a posição, x, e o tempo, t, estão na forma $f(x + Vt)$ ou $f(x - Vt)$ satisfazem a equação de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

4.3. Uma onda P harmônica e plana, propaga-se na direção x com velocidade c. Os deslocamentos são dados por: $u = A\cos(kx - \omega t)$, onde k = número de onda = $2\pi/\lambda$ (λ= comprimento de onda), e $\omega = 2\pi/T$ = frequência angular; T = período.

Mostre que $\lambda = cT$, e que $c = \omega / k$

a) deduza a expressão da densidade de energia cinética.

b) Deduza a expressão da densidade de energia potencial e mostre que ela é igual à densidade de energia cinética. (Dica: use o resultado do exercício 3.6 do capítulo de Lei de Hooke).