5. Coeficientes de Reflexão e Transmissão Incidência normal

5.1 Introdução

Quando uma onda sísmica (com amplitude A_o) incide numa interface, parte da energia é transmitida para o outro lado (onda refratada ou transmitida) e parte é refletida de volta para o meio de onde a onda veio (onda refletida). Vamos estudar agora a relação entre as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas.

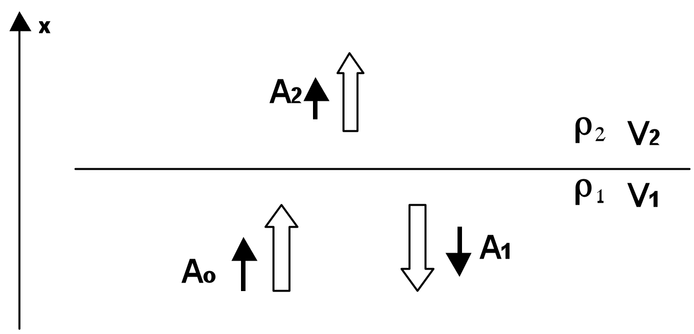


Fig. 1. Uma interface separa dois meios com densidades e velocidades diferentes. Setas brancas grandes representam **direção de propagação**, e setas pequenas pretas representam o **deslocamento** das partículas (a vibração da onda P). Uma onda P de amplitude A_o propagando-se no meio 1, no sentido +x, incide na interface com o meio 2. A interface está na posição x=0. As densidades e velocidades de propagação são ρ e V, respectivamente.

Vamos considerar o caso particular de ondas senoidais, ou seja, a vibração das partículas varia no tempo e espaço de acordo com

$$u_i(x,t) = A_o \cos(k_1 x - \omega t) = A_o \cos[k_1(x - V_1 t)]$$
$$u_r(x,t) = -A_1 \cos(-k_1 x - \omega t) = -A_1 \cos[-k_1(x + V_1 t)]$$
$$u_t(x,t) = A_2 \cos(k_2 x - \omega t) = A_2 \cos[k_2(x - V_2 t)]$$

onde

u_i é o oscilação (deslocamento) da onda incidente com amplitude máxima A_o, frequência angular ω, velocidade de propagação V_1, e número de onda $k_1 = \omega / V_1 = 2\pi/\lambda_1$, sendo λ_1 o comprimento de onda das ondas no meio 1 (incidente e refletida). Os índices r e t referem-se às ondas refletidas e transmitidas. Para a onda refletida u_r, o sinal negativo "$-k_1$" indica propagação no sentido negativo do eixo *x*. O sinal negativo da amplitude "$-A_1$" será explicado adiante.

Uma partícula qualquer no meio 1 terá seu deslocamento (u_1) dado pela superposição da onda incidente com a refletida:

$$u_1(x<0, t) = u_i(x,t) + u_r(x,t)$$

Sinal das amplitudes

Deve-se lembrar que as vibrações das ondas sísmicas ("deslocamento das partículas") são grandezas vetorias. O deslocamento de qualquer partícula, u(x,t), será positivo se a partícula tiver se deslocado para cima (sentido positivo do eixo x), e negativo se o deslocamento tiver sido para baixo. O *sinal das amplitudes máximas* A_o, A_1 e A_2 (positivo ou negativo), no entanto, *dependem de uma convenção*. Há duas convenções comuns para o sinal da amplitude de uma onda P:

a) a amplitude é positiva se o deslocamento for no mesmo sentido do eixo x do sistema de coordenadas de referência. Nesta convenção, os deslocamentos na Fig. 1 seriam
A_o e $A_2 > 0$, e $A_1 < 0$.

b) a amplitude da onda P é positiva se o deslocamento for no mesmo sentido da propagação da onda. Neste caso, A_o, A_2, e $A_1 > 0$.

A convenção ***a*** é a mais usada em Sismologia, principalmente quando há ondas S ou no caso de duas dimensões (incidência inclinada). A convenção ***b*** é usada frequentemente em sísmica aplicada nos casos onde as ondas têm incidência aproximadamente normal e há apenas ondas P. Neste texto adotaremos a convenção ***b***, isto é, se os deslocamentos forem nos sentidos indicados na Fig. 1, as amplitudes serão positivas.

5.2 Cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão

Para calcular a relação entre as amplitudes A_o, A_1 e A_2, são necessárias duas condições de contorno.

I) ***Continuidade dos deslocamentos***. Dois pontos "juntos" devem se deslocar com as mesmas amplitudes. A amplitude de uma partícula do meio 1, *junto à interface*, deve ser igual à amplitude de outra partícula do meio 2 que também esteja encostada à interface (caso contrário os dois meios estariam se abrindo ou se sobrepondo). Isto é:

em x = 0 $\quad u_1(0-,t) = u_2(0+,t) = u_t(0+,t)$

ou seja, $\quad A_0 - A_1 = A_2 \qquad$ (I)

II) ***Conservação de energia***. O fluxo de energia incidente na interface é igual à soma dos fluxos de energia transmitida e refletida. Uma onda harmônica com amplitude máxima de deslocamento A, frequência ω, e velocidade de propagação V, terá

fluxo de energia = $\frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 V$ [Veja o quadro abaixo sobre fluxo de energia]

fluxo de energia da onda incidente = $\frac{1}{2} \rho (\omega A_o)^2 V_1$

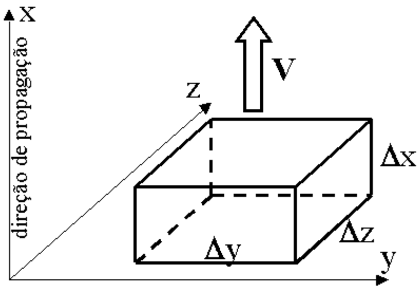
Chamando o produto **ρV = Z** = "**impedância acústica**", teremos:

fluxo incidente ⇒ $\frac{1}{2} \omega^2 Z_1 A_o^2$

fluxo refletido ⇒ $\frac{1}{2} \omega^2 Z_1 A_1^2$

fluxo transmitido ⇒ $\frac{1}{2} \omega^2 Z_2 A_2^2$

O que é "fluxo de energia"? É a quantidade de energia que atravessa uma superfície, por unidade de área e por unidade de tempo. Vamos ver como se expressa esta energia. A Figura 2 mostra um elemento de volume em uma onda que se propaga na direção x.



Este elemento de volume bem pequeno, Δx.Δy.Δz, ao vibrar durante a passagem de uma onda sísmica terá energia cinética

= ½ (ρ . Δx.Δy.Δz).(velocidade da partícula)^2

velocidade máxima de vibração da partícula $(\partial u/\partial t) = \omega A$
densidade de energia sísmica = energia /volume = ½ ρ $(\omega A)^2$

A energia cinética da onda, contida no volume Δx.Δy.Δz, vai demorar um tempo Δt para atravessar a superfície Δy.Δz.

fluxo de energia = [energia]/(área . Δt) = [½ (ρ . Δx.Δy.Δz).$(\omega A)^2$] /(Δy.Δz . Δt)
como Δx/Δt = velocidade de <u>propagação</u> da onda = V

fluxo = ½ ρ $(\omega A)^2$ V = ½ ρ (<u>velocidade da partícula</u>)^2 .(<u>Velocidade de propagação</u>)

Observação: Nesta dedução, dissemos que a densidade de energia cinética é ½ ρ $(\omega A)^2$. Numa onda harmônica, porém, a velocidade da partícula varia no tempo e esta expressão seria a energia <u>máxima</u>. Além da energia cinética, a onda sísmica tem energia potencial devido à deformação elástica das rochas. Pode-se demonstrar que, na média, a energia cinética é igual à energia potencial, de maneira que a <u>densidade de energia total</u> da onda é mesmo equivalente a ½ ρ $(\omega A)^2$.

<u>**Exercício 1**, aplicação do conceito de fluxo de energia</u>:
Tsunamis são ondas que se propagam pelo oceano geradas por um deslocamento vertical súbito do fundo oceânico na região epicentral de um terremoto grande. (O movimento de partícula destas ondas é parecido com o da onda superficial Rayleigh, embora os tsunamis não sejam ondas "elásticas", mas ondas "de gravidade"). A velocidade de propagação de um tsunami depende da profundidade do mar: $V = (g\ h)^{1/2}$; g = aceleração da gravidade, e h = espessura da camada de água.
a) calcule a velocidade de propagação do tsunami em alto mar onde a profundidade é h_a=5km, e próximo da costa onde h_c=50m. Expresse as velocidades em km/h.
b) Um terremoto na costa do Chile gerou um tsunami cuja amplitude em alto mar, na região do Havaí, é de A_a = 30cm. Use o conceito de fluxo de energia e densidade de energia sísmica para estimar a amplitude do tsunami perto da costa onde o mar tem profundidade de h_c=50m.

Conservação de energia:

fluxo incidente = fluxo refletido + fluxo transmitido

Cancelando o termo ½ ω^2, teremos:

conservação de energia: $Z_1A_0^2 = Z_1A_1^2 + Z_2A_2^2$ (II)

As equações (I) e (II) fornecem:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \mathbf{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{A_2}{A_0} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = \mathbf{t} \qquad \text{(III)}$$

Podemos definir coeficientes de reflexão e de transmissão, em termos de <u>amplitude dos deslocamentos</u> ou em termos de <u>fluxo de energia</u>

<u>Energia</u>

Coef. de reflexão **R** = fluxo refletido/fluxo incidente = $\dfrac{Z_1A_1^2}{Z_1A_0^2} = \dfrac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$

Coef. de transmissão **T** = fluxo transmitido/fluxo incidente = $\dfrac{Z_2A_2^2}{Z_1A_0^2} = \dfrac{4Z_2Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}$

Note que **R** + **T** = 1 (conservação de energia, eq II) e que **R** e **T** independem de qual meio (1 ou 2) vem a onda incidente.

<u>Amplitude:</u>

Denominando **r** = A_1/A_0 e **t** = A_2/A_0 (Aqui **t** não é tempo!)

Teremos também :

r + **t** = 1 (continuidade do deslocamento, eq. I)

R e T são ambos positivos e ≤ 1. Porém **t** pode ser > 1 e **r** pode ser negativo. Os valores **r** e **t** dependem se a onda incidente está no meio 1 ou no meio 2. Ou seja, nas fórmulas III, <u>*Z_1 é a impedância do meio de onde a onda está vindo, e Z_2 a do meio para onde a onda vai*</u> !

Note que os coeficientes **r, t, R** e **T** não dependem da frequência ω. Isto significa que qualquer forma de onda (superposição de ondas com várias frequências diferentes) terá os mesmos coeficientes de reflexão e de transmissão. Ou seja, as fórmulas III valem tanto para ondas harmônicas como para qualquer pulso de onda sísmica!

5.3 Continuidade das tensões

Além das condições de contorno de continuidade dodeslocamento e conservação de energia, há também continuidade das tensões na interface. Para a propagação mostrada na Fig. 1, podemos expressar as três ondas harmônicas como:

$u_o(x,t) = A_o \exp [i(k\,x - \omega\,t)] = A_o \exp [ik_1(x - V_1\,t)]$
$u_1(x,t) = -A_1 \exp[i\,(k\,x - \omega\,t)] = -A_1 \exp [-ik_1(x + V_1\,t)]$
$u_2(x,t) = A_2 \exp [i(k\,x - \omega\,t)] = A_2 \exp [ik_2(x - V_2\,t)]$

O uso da exponencial imaginária facilita a manipulação matemática, mas deve-se entender que as grandezas físicas (amplitudes de deslocamento, por exemplo) são dadas pela parte real das funções. A parte imaginária dá informação da fase!

No caso da onda P com incidência normal, a tensão p_{xx} deve ser contínua entre os dois meios. Ou seja, supondo que a interface esteja posicionada na posição x=0, teremos no meio 1 deve ser igual à tensão no meio 2 quando x=0 :

$p_{xx}\,(x=0-) = p_{xx}(x=0+)$

Exercício 2. Expresse as deformações e as tensões correspondentes às ondas planas u_o, u_1 e u_2 (use as definições das deformações e a lei de Hooke). Expresse as constantes elásticas em termos de velocidade da onda P (V_1, etc.) e densidades, e deduza a terceira condição de contorno referente à continuidade da tensão, mostrando que:

$$Z_1A_0 + Z_1A_1 = Z_2A_2 \qquad \text{(III)}$$

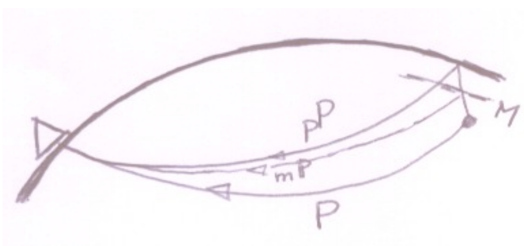
Use a condição de contorno (continuidasde do deslocamento, eq. I) junto com a eq. III e deduza novamente os coeficientes de reflexão $r = A_1/A_o$ e transmissão $t = A_2/A_o$.

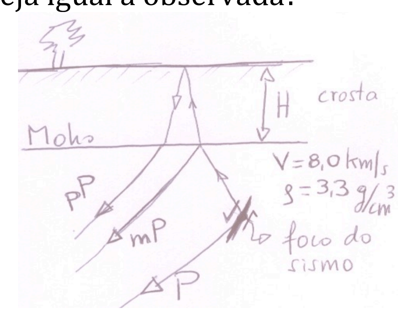
Exercício 3. Embora tenhamos apenas duas incógnitas (relações A_1/A_o e A_2/A_o), temos três equações das condições de contorno: continuidade do deslocamento, continuidade das tensões, e conservação de energia. Porque temos mais equações do que incógnitas? Dica: escreva as três equações, uma abaixo da outra, e relacione as leis físicas que cada uma representa.

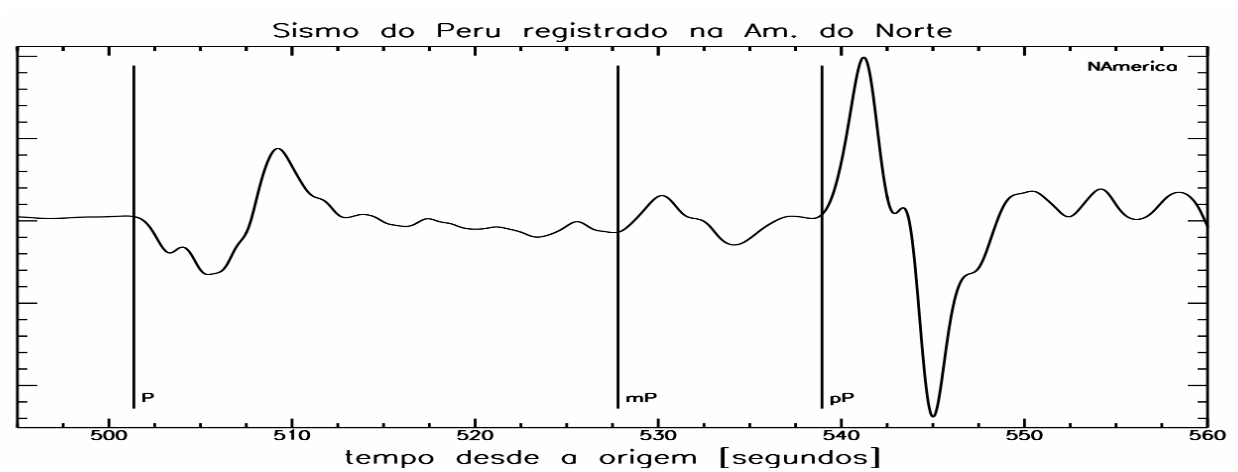
Exercício 4. Um sismo de magnitude 6,8 ocorrido na fronteira Peru-Brasil foi registrado por uma estação nos Estados Unidos a 66º de distância angular . O sismo teve uma profundidade de 150km. A estação registrou a reflexão da superficie (pP) e uma outra fase, um pouco antes da pP, interpretada como sendo uma reflexão da descontinuidade de Moho (interface crosta/manto), chamada de mP.
O manto abaixo da crosta tem Vp= 8,0 km/s e densidade 3,3 g/cm³. A velocidade P média da crosta é de ~6,5 km/s e a densidade é 3.0 g/cm³.

a) Suponha incidência vertical das reflexões e estime a espessura da crosta (H) perto do sismo.

b) Para confirmar a interpretação acima, é preciso estimar a razão de amplitude mP/pP. Use os dados de velocidade e densidades acima para estimar qual seria a razão esperada entre as amplitudes das ondas mP/pP (suponha percurso vertical). Meça a razão das amplitudes mP e pP, e compare com o valor esperado. Como deveriam ser a velocidade e a densidade da crosta (maior ou menor que os valores acima) para que a razão de amplitudes teórica seja igual à observada?







Exercício 5.
Suponha uma onda S harmônica incidindo verticalmente numa superfície livre. Use o fato de que na superfície livre as tensões são nulas e deduza o coeficiente de reflexão da onda S. Cuidado com a definição dos sinais das amplitudes em relação aos eixos de coordenadas!