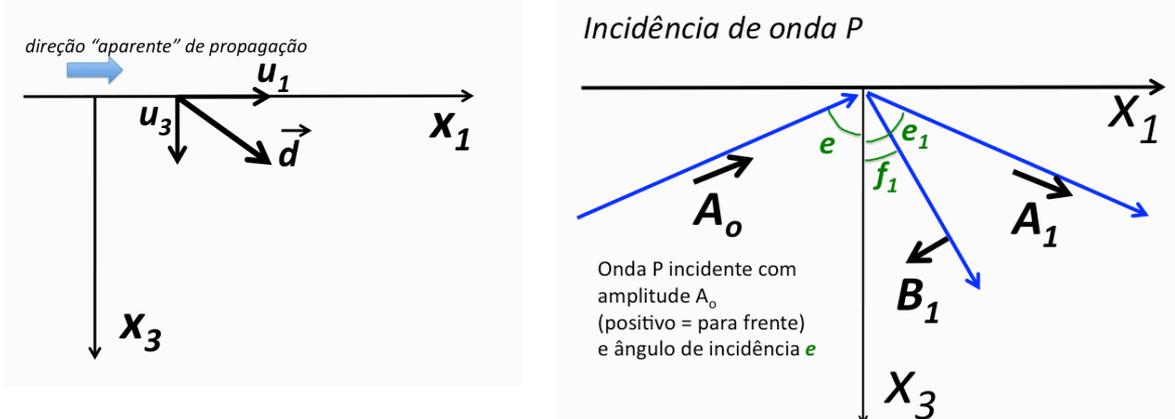


### Reflexão de ondas P e SV na Superfície Livre

(Notas de Aula baseadas em Ben-Menahem & Singh, 1981 "Seismic Waves and Sources")

Vamos adotar as deduções do Ben-Menahem & Singh (1981). Superfície livre é definida em  $x_3 = 0$ . Direção horizontal de propagação aparente =  $x_1$  (Fig. 1a). Note a convenção para os ângulos de incidência  $e$ ,  $e_1$  (onda P) e  $f_1$  (onda S) na Fig. 1b abaixo:



**Fig. 1 a)** eixos do sistema de referência e componentes do deslocamento.

**b)** Onda P incidente

#### 3.2.2. Incident P Waves

In the case of incident P waves we have reflected P as well as reflected SV waves. The displacement vector therefore is given by

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & A(\mathbf{a}_1 \sin e - \mathbf{a}_3 \cos e) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x_1 \sin e - x_3 \cos e}{\alpha} \right) \right] \\ & + A_1(\mathbf{a}_1 \sin e_1 + \mathbf{a}_3 \cos e_1) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x_1 \sin e_1 + x_3 \cos e_1}{\alpha} \right) \right] \\ & + B_1(-\mathbf{a}_1 \cos f_1 + \mathbf{a}_3 \sin f_1) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x_1 \sin f_1 + x_3 \cos f_1}{\beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

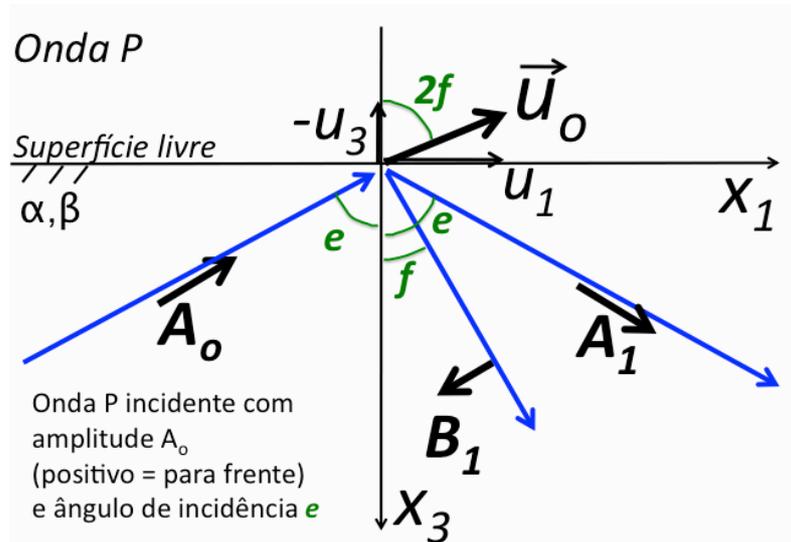
In order that the boundary condition, Eq. (3.6), be satisfied for all values of  $x_1$  and  $t$ , we must have  $e_1 = e$  and

$$\frac{\sin e}{\alpha} = \frac{\sin f}{\beta}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_3$  são os vetores unitários nas direções  $x_1$  e  $x_3$

Eqs. 3.8 e 3.9 (Ben-Menahem & Singh, 1981).

Note nas equações acima que o Ben-Menahem adota uma convenção diferente nos sinais de  $kx$  e  $\omega t$ , ou seja  $\exp[i(\omega t - kx)]$  em vez de  $\exp[i(kx - \omega t)]$ . Nesta convenção do Ben-Menahem, uma onda propagando-se na direção + do eixo  $x$  é expressa como  $\exp[i(\omega t - kx)]$ .



**Fig. 2.** Deslocamento ( $\mathbf{u}_0$ ) na superfície que é a superposição das ondas P incidente ( $A_0$ ), P refletida ( $A_1$ ) e S refletida ( $B_1$ ).

Calculando-se as tensões com as eq. 3.8, e usando-se a condição de contorno de que as tensões na superfície livre ( $x_3=0$ ) são nulas, obtém-se os coeficientes de reflexão:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\sin 2e \sin 2f - (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f}{\sin 2e \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f} \quad (3.10)$$

$$\frac{B_1}{A} = \frac{-2(\alpha/\beta) \sin 2e \cos 2f}{\sin 2e \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f}$$

Note na Fig. 2 que a direção do movimento de partícula na superfície ( $\mathbf{u}_0$ ) é a soma vetorial da onda P incidente + a P refletida + a SV refletida, e portanto não tem a mesma direção que a onda P incidente. O “ângulo de incidência aparente”, dado pelo movimento de  $\mathbf{u}_0$ , é:

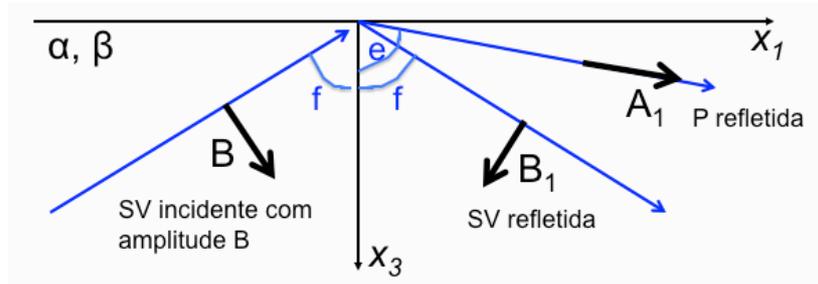
$$e' = 2f.$$

### Exercício:

1) Faça um gráfico da diferença entre o ângulo de incidência da onda P incidente ( $e$ ) e o ângulo de incidência aparente ( $e'$ ) em função do ângulo de incidência. Ou seja, faça uma planilha para calcular e plotar  $(e' - e)$  em função de  $e$ . Use uma relação  $V_p/V_s = \alpha/\beta = \sqrt{3}$ . Ou faça a planilha usando a razão de velocidades como um parâmetro adicional.

2) Analise a onda P do sismo da Grécia registrado em Areado, MG. Determine o ângulo de incidência aparente e o ângulo real. Use o parâmetro  $p$  deste raio (prof.=24km, distância=86.2°) com o programa *taup* ou *ttimes*, para estimar a velocidade aparente desta onda P e a velocidade média da crosta superior abaixo da estação.

**Onda SV incidente**



Usando-se equações similares às eq. 3.8, para a onda S incidente, e a condição de que as tensões na superfície livre são nulas. Obtém-se os coeficientes de reflexão abaixo:

The amplitude ratios are found to be

$$\frac{A_1}{B} = \frac{(\alpha/\beta)\sin 4f}{\sin 2e \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f} \tag{3.15}$$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{\sin 2e \sin 2f - (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f}{\sin 2e \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f} \tag{3.16}$$

**Exercícios:**

3) Calcule os coeficientes de reflexão para uma SV incidente com  $f = 30^\circ$ . Tendo as amplitudes refletidas, calcule o ângulo de incidência aparente (i.e., o ângulo medido pelo movimento total da superfície (Faça a superposição de todas as componentes e mostre que o  $i$  aparente é mesmo  $= 2f$ . Qual a diferença entre o ângulo de incidência real e o aparente?

4) Calcule o ângulo crítico  $f_c$  para uma SV incidente produzir onda P refletida. Veja os casos de  $V_p/V_s = 1.60, 1.732 (= \sqrt{3}),$  e  $2.00$

5) Faça um gráfico da amplitude da S refletida, em função do ângulo de incidência  $f$  (use uma planilha).

6) Calcule os coeficientes de reflexão  $B_1$  e  $A_1$  para uma SV incidente com  $f = 45^\circ$ . Use ângulos complexos, expressando cossenos em termos de senos e a Lei de Snell. Mostre como seria o movimento da partícula na superfície.

## Incidência supercrítica

Para ângulos de incidência  $f$  maiores que o ângulo crítico  $f_1$ , os deslocamentos na superfície ficarão defasados em relação à onda incidente.

The surface displacement is given by

$$(u_1)_0 = \begin{cases} \frac{2(\alpha/\beta)^2 \cos f \cos 2f}{\sin 2e \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f}, & (f \leq f_1) \\ 2 \cos f \sec 2f \sin \chi e^{i(\pi/2 - \chi)}, & (f > f_1), \end{cases} \quad (3.25)$$

$$(u_3)_0 = \begin{cases} \frac{2(\alpha/\beta) \cos e \sin 2f}{\sin 2e \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cos^2 2f}, & (f \leq f_1) \\ \operatorname{cosec} f \cos \chi e^{-i\chi}, & (f > f_1). \end{cases} \quad (3.26)$$

Therefore

$$\left( \frac{u_1}{u_3} \right)_0 = \begin{cases} \tan e \cot f \cot 2f, & (f \leq f_1) \\ i \tan 2f \tan \chi, & (f > f_1). \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\tan \chi = \frac{\cos 2f \cot 2f}{2 \sin f (\sin^2 f - \beta^2/\alpha^2)^{1/2}}. \quad (3.22)$$

$(u_1)_0$  = componente horizontal do deslocamento na superfície (soma das três ondas).

$(u_3)_0$  = componente vertical do deslocamento na superfície (soma das três ondas).

## Exercícios

7) Calcule os coeficientes de reflexão para SV incidente com  $f = 60^\circ$  (e  $V_p/V_s = \sqrt{3}$ ). Mostre que o movimento da partícula é elíptico progressivo.

8) Analise o movimento de partícula da onda P e da SV do sismo do Chile e discuta que tipo de movimento é em cada caso. Use um filtro para passar apenas períodos mais longos.

9) Para o ângulo crítico  $f = f_c$ , calcule os coeficientes A1 e B1 pelas equações 3.15 e 3.18, e expresse as equações das ondas P e SV refletidas no estilo das eq. 3.8 da página 1. Veja que a onda P não depende de  $x_3$  - o que isso significa?

Ref.:

Ben-Menahem, A. & Singh, S.J. (1981) "Seismic Waves and Sources", Springer\_Verlag.  
Capítulo 3.